Correction du DM4

Exercice 1

1. $\begin{pmatrix} 10 & -6 \\ -6 & 10 \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$ 3. $\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ -7 & 0 \end{pmatrix}$ 4. $\begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} \cos(\alpha-\beta) & \sin(\beta-\alpha) \\ \sin(\alpha-\beta) & \cos(\alpha-\beta) \end{pmatrix}$

Exercice 3

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ... $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ par récurrence pour tout $n \in \mathbb{N}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = 2A$ donc $A^n = 2^{n-1}.A$ pour $n \geq 1$ et $A^0 = I_2$
par récurrence immédiate

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $A^3 = 0_4$ donc $A^n = 0_4$ si $n \geq 3$
par récurrence immédiate

$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$ donc $A^n = \begin{cases} I_3 & \text{si } n \text{ pair} \\ A & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$

car $A^{2p} = (A^2)^p = I_3^p = I_3$ et $A^{2p+1} = A \times A^{2p} = A \times I_3 = A$

Exercice 6

1. $AN = NA$ car $A = aI_3$ et I_3 commute avec tout le monde...

$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $N^3 = 0_3$

Donc d'après la formule du binôme, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$B^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} . N^k \times A^{n-k}$$

donc si $n \geqslant 3$:

$$B^n \underset{\text{chasles}}{=} \binom{n}{0}.N^0 \times A^n + \binom{n}{1}.N^1 \times A^{n-1} + \binom{n}{2}.N^2 \times A^{n-2} + \sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k}.N^k \times A^{n-k}$$

et $N^3 = 0_3$ donne $\forall k \geqslant 3$ $N^k = 0_3$ (⚠ faux si $k \in \{0,1,2\}$)

d'où $\forall n \geqslant 3$, $B^n = A^n + n.NA^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} N^2 A^{n-2}$

et $A = a I_3$ donc $A^n = a^n.I_3$, $A^{n-1} = a^{n-1}.I_3$ et $A^{n-2} = a^{n-2} I_3$

donc $\forall n \geqslant 3$, $B^n = a^n.I_3 + na^{n-1}.N + \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2}.N^2$

$$= \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2} \\ 0 & a^n & na^{n-1} \\ 0 & 0 & a^n \end{pmatrix}$$

et la formule est vraie pour $n = 2$

2. $A = 2J - I_3$ et $J^2 = 3J$ donc par récurrence immédiate

$\forall k \geqslant 1$, $J^k = 3^{k-1}.J$ (⚠ faux si $k = 0$)

Comme $2J$ et I_3 commutent (I_3 commute avec tout $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$)

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} . (2J)^k \times (-I_3)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k (-1)^{n-k} . J^k \times I_3^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k (-1)^{n-k} . J^k \overset{\text{si } n \geqslant 1}{=} \binom{n}{0} 2^0 (-1)^n + \left[\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^k (-1)^{n-k} 3^{k-1} \right] J$$

$$= (-1)^n I_3 + \frac{1}{3} . \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k (-1)^{n-k} 3^k - \binom{n}{0} 2^0 (-1)^n 3^0 \right] . J$$

$$= (-1)^n I_3 + \frac{1}{3} . \left[(6-1)^n - (-1)^n \right] . J = \boxed{(-1)^n . I_3 + \frac{5^n - (-1)^n}{3} . J}$$

si $n \geqslant 1$.

et aussi si $n = 0$

Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5^n+2(-1)^n & 5^n-(-1)^n & 5^n-(-1)^n \\ 5^n-(-1)^n & 5^n+2(-1)^n & 5^n-(-1)^n \\ 5^n-(-1)^n & 5^n-(-1)^n & 5^n+2(-1)^n \end{pmatrix}}$

3