Correction du DM 5

PROBLEME _ Partie I

1. function [v] = suite(n)

```
    a=0
    b=0
    c=1
    for k=2:n
        v=-c+5*b-3*a
        a=b
        b=c
        c=v
    end
```

Ensuite dans la console : --> suite(46)

2.(a) $R^2 = O_2$ donc $\forall n \geqslant 2$, $R^n = O_2$ par récurrence immédiate

2.(b) D est diagonale donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $D^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & a^n & 0 \\ 0 & 0 & b^n \end{pmatrix}$

2.(c) $J(a,b) = D + R$

De plus $DR = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = RD$ donc d'après la formule du binôme :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $J(a,b)^n = (D+R)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} R^k D^{n-k}$

$\forall n \geqslant 2$, $J(a,b)^n = D^n + nRD^{n-1} + O_2$

$$= \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} & 0 \\ 0 & a^n & 0 \\ 0 & 0 & b^n \end{pmatrix}$$

3. $\forall n \geqslant 2,\ V_{n+1} = N.V_n$

donc $\forall n \geqslant 2,\ V_n = N^{n-2}.V_2$ par récurrence immédiate

4. On utilise la méthode du système linéaire

$$\begin{cases} \boxed{x_1} + 3x_2 + 9x_3 = y_1 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = y_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = y_3 \end{cases} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} \boxed{x_1} + 3x_2 + 9x_3 = y_1 \\ \boxed{-x_2} - 12x_3 = y_2 - y_1 \\ -2x_2 - 8x_3 = y_3 - y_1 \end{cases}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} \boxed{x_1} + 3x_2 + 9x_3 = y_1 \\ \boxed{-x_2} - 12x_3 = y_2 - y_1 \\ \boxed{16x_3} = y_1 - 2y_2 + y_3 \end{cases}$$

$rg(S) = 3$ donc P inversible

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{16}(-5y_1 - 6y_2 + 27y_3) \\ x_2 = \frac{1}{16}(4y_1 + 8y_2 - 12y_3) \\ x_3 = \frac{1}{16}(y_1 - 2y_2 + y_3) \end{cases}$$

donc $\boxed{P^{-1} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} -5 & -6 & 27 \\ 4 & 8 & -12 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}}$

4.(b) $N = P.J(1,-3).P^{-1}$ donc $\forall n \in \mathbb{N},\ N^n = P.J(1,-3)^n.P^{-1}$

par récurrence immédiate.

5. On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad N^n = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-3)^n \end{pmatrix}}^{\text{pour } n \geqslant 2 \text{ et vrai si } n=0 \text{ ou } 1} \frac{1}{16} \begin{pmatrix} -5 & -6 & 27 \\ 4 & 8 & -12 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

et v_n est le coefficient $(1,1)$ de N^{n-2}

puisque $V_n = N^{n-2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

donc $\boxed{v_n = \frac{1}{16}\left(4(n+1) + (-1)^n \times 3^n - 5\right)}$

pour $n-2 \geqslant 0$ ie $n \geqslant 2$

et cette formule est vraie si $n = 0$ ou 1.

6. Dans la console :

--> $\frac{1}{16}(4*(15+1)+(-1)\verb|^|15*3\verb|^|15-5)$

ans =

-8071256

Partie II

1.(a) $Q^2 = M^2 - 2\beta M + \beta^2 I_2$ car I_2 et M commutent

et $0 = (M - \alpha I)(M - \beta I) = M^2 - (\alpha+\beta)M + \alpha\beta I$

donc $M^2 = (\alpha+\beta)M - \alpha\beta I$

Ainsi $Q^2 = (\alpha - \beta)M + (\alpha-\beta)\beta I = \boxed{(\alpha-\beta)Q}$

Par récurrence immédiate : $\boxed{\forall n \geq 1,\ Q^n = (\alpha-\beta)^{n-1} Q}$

⚠ c'est faux si $n = 0$

1.(b)
$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \beta^{n-k} (\alpha-\beta)^{k-1}$$
$$= \frac{1}{\alpha-\beta}\left[\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \beta^{n-k}(\alpha-\beta)^{k}\right) - \beta^n\right]$$
$$= \frac{1}{\alpha-\beta}\left[(\beta+\alpha-\beta)^n - \beta^n\right] = \boxed{\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha-\beta}}$$

1.(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\beta^{n-k}\underbrace{(\alpha-\beta)^{k-1}}_{=0 \text{ si } k\geq 1} = \binom{n}{1}\beta^{n-1}(\alpha-\beta)^{0}+0$

$= \boxed{n\beta^{n-1}}$

1.(d) $M = Q+\beta I$ Comme Q et βI commutent

on a :

$\forall n\in\mathbb{N},\ M^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}Q^k\beta^{n-k}I^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\beta^{n-k}Q^k$

$= \beta^n . I + \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\beta^{k}(\alpha-\beta)^{k-1}\right). Q$

$\boxed{\begin{array}{l} \underline{\text{Si } \alpha\neq\beta} : \forall n\in\mathbb{N},\ M^n = \beta^n . I + \dfrac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}. Q \\ \underline{\text{Si } \alpha=\beta} : \forall n\in\mathbb{N},\ M^n = \beta^n I + n.\beta^{n-1}. Q \end{array}}$

2.(a) Si on pose $M=\begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 0\end{pmatrix}$ alors $\forall n\geq 1,\ U_{n+1} = MU_n$

puisque $u_{n+1} = au_n + bu_{n-1}$

Alors $\forall n\geq 1,\ U_n = M^{n-1}. U_1$

2.(b) $(M-\alpha I)(M-\beta I) = M^2-(\alpha+\beta)M+\alpha\beta I$

or α, β solutions de $x^2-ax-b=0$

donc $\alpha+\beta=a$ et $\alpha\beta=-b$ (th de Viet)

donc $(M-\alpha I)(M-\beta I) = M^2-aM-bI = \underline{0}$

Oubli : $M^2 = \begin{pmatrix} a^2+b & ab \\ a & b \end{pmatrix} = aM+bI$ donc $\underline{M^2-aM-bI=0}$

et 0 n'est pas solution de $x^2-ax-b=0$ (car $b\neq 0$)

donc $\underline{\alpha\neq 0}$ et $\underline{\beta\neq 0}$

2.(c) On a donc $\boxed{\text{si } \alpha=\beta}$ alors $a=2\beta$ et $b=-\beta^2$

$\forall n\in\mathbb{N}$, $M^n = \beta^n I + n\beta^{n-1}Q = \beta^n I + n\beta^{n-1}.(M-\beta I)$

$$= \beta^n I + n\beta^{n-1}\begin{pmatrix} \beta & -\beta^2 \\ 1 & -\beta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (n+1)\beta^n & -n\beta^{n+1} \\ n\beta^{n-1} & (1-n)\beta^n \end{pmatrix}$$

Et si $n \geq 1$:

$$U_n = M^{n-1}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix}$$

En regardant la premièré ligne :

$$\forall n \geq 1, \quad u_n = n\beta^{n-1}.u_1 - (n-1)\beta^n u_0$$
$$= n\beta^{n-1}u_1 + (1-n)\beta^n u_0$$

et c'est vrai si $n = 0$

$\boxed{\text{Si } \alpha \neq \beta}$ $\forall n \in \mathbb{N}, \; M^n = \beta^n . I + \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}(M - \beta I)$

$$= \beta^n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}\begin{pmatrix} \alpha & -\alpha\beta \\ 1 & -\beta \end{pmatrix}$$

et si $n \geq 1$, u_{n-1} est la deuxième ligne de $U_n = M^{n-1}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$

$$\text{donc } u_{n-1} = \beta^{n-1} \times u_0 + \frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta}(u_1 - \beta u_0)$$

donc pour $n \geq 2$, $u_n = \beta^n u_0 + \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}(u_1 - \beta u_0)$

et cette formule est vraie pour $n = 0$ et $n = 1$.