Correction du DM 6 ①

PROBLEME

1.(a) On a $|\exp_{\mathbb{C}}(z)| = e^{Re(z)} > 0$

donc $\boxed{\exp_{\mathbb{C}}(z) \neq 0}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$

1.(b) On pose $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$ avec $(a_1, a_2, b_1, b_2) \in \mathbb{R}^4$.

Alors $\exp_{\mathbb{C}}(z_1+z_2) = e^{a_1+a_2} \times \left(\cos(b_1+b_2) + i \cdot \sin(b_1+b_2)\right)$

$= e^{a_1} \times e^{a_2} \times \left(\cos(b_1)\cos(b_2) - \sin(b_1)\sin(b_2) + i\sin(b_1)\cos(b_2) + i\cos(b_1)\sin(b_2)\right)$

$= e^{a_1}\left(\cos(b_1) + i\sin(b_1)\right) \times e^{a_2}\left(\cos(b_2) + i \cdot \sin(b_2)\right)$

$= \boxed{\exp_{\mathbb{C}}(z_1) \times \exp_{\mathbb{C}}(z_2)}$ pour tout $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$

1.(c) $\exp_{\mathbb{C}}(z) = 1 \iff \underbrace{e^{Re(z)}}_{>0} \times e^{i\,Im(z)} = 1 = e^{i0}$

$\underset{\text{unicité de la forme trigo}}{\iff} \begin{cases} e^{Re(z)} = 1 \\ Im(z) = 0\ [2\pi] \end{cases}$

$\iff \begin{cases} Re(z) = 0 \\ \exists k \in \mathbb{Z} / \ Im(z) = 2k\pi \end{cases}$

$\boxed{\iff \exists k \in \mathbb{Z} / \ z = 2ik\pi}$

2.(a) Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$ch^2(z) - sh^2(z) = \frac{1}{2^2}\left(\exp_{\mathbb{C}}(z) + \exp_{\mathbb{C}}(-z)\right)^2 - \frac{1}{2^2}\left(\exp_{\mathbb{C}}(z) - \exp_{\mathbb{C}}(-z)\right)^2$$

$$\underset{1.(b)}{=} \frac{1}{4}\left[\cancel{\exp_{\mathbb{C}}(2z)} + \cancel{\exp_{\mathbb{C}}(-2z)} + 2 - \cancel{\exp_{\mathbb{C}}(2z)} - \cancel{\exp_{\mathbb{C}}(-2z)} - (-2)\right]$$

$$= \boxed{1}$$

2.(b) Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$.

$$ch(z_1)ch(z_2) + sh(z_1)sh(z_2) = \frac{1}{4}\left(\exp_{\mathbb{C}}(z_1) + \exp_{\mathbb{C}}(-z_1)\right) \times \left(\exp_{\mathbb{C}}(z_2) + \exp_{\mathbb{C}}(-z_2)\right)$$
$$+ \frac{1}{4}\left(\exp_{\mathbb{C}}(z_1) - \exp_{\mathbb{C}}(-z_1)\right) \times \left(\exp_{\mathbb{C}}(z_2) - \exp_{\mathbb{C}}(-z_2)\right)$$

$$\underset{1.(b)}{=} \frac{1}{4}\Big(\exp_{\mathbb{C}}(z_1+z_2) + \exp_{\mathbb{C}}(-z_1-z_2) + \cancel{\exp_{\mathbb{C}}(z_1-z_2)} + \cancel{\exp_{\mathbb{C}}(z_2-z_1)}$$
$$+ \exp_{\mathbb{C}}(z_1+z_2) + \exp_{\mathbb{C}}(-z_1-z_2) - \cancel{\exp_{\mathbb{C}}(z_1-z_2)} - \cancel{\exp_{\mathbb{C}}(z_2-z_1)}\Big)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\exp_{\mathbb{C}}(z_1+z_2) + \exp_{\mathbb{C}}(-z_1-z_2)\right) = \boxed{ch(z_1+z_2)}$$

2.(c) Soit $x \in \mathbb{R}$. $ch(ix) = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right) = \boxed{\cos(x)}$

$$sh(ix) = \frac{1}{2}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right) = \boxed{i \cdot \sin(x)}$$

3.(a) $P(n)$ = " $\forall z \in \mathbb{C}, T_n(ch\, z) = ch(nz)$ "

Pour $n=0$: $P(0)$ vraie car $1 = 1$

Pour $n=1$: $P(1)$ vraie car $ch\, z = ch\, z$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

Supposons $P(n)$ et $P(n+1)$ vraies pour $n \in \mathbb{N}$ fixé.

Alors $\forall z \in \mathbb{C}$, $T_{n+2}(ch\, z) = 2\, ch(z) \cdot T_{n+1}(ch\, z) - T_n(ch\, z)$

$$= 2ch(z) \cdot ch((n+1)z) - ch(nz)$$

$$= (exp_{\mathbb{C}}(z) + exp_{\mathbb{C}}(-z)) \times \frac{1}{2}\left(exp_{\mathbb{C}}((n+1)z) + exp_{\mathbb{C}}(-(n+1)z)\right)$$

$$- \frac{1}{2}\left(exp_{\mathbb{C}}(nz) + exp_{\mathbb{C}}(-nz)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\Big(exp_{\mathbb{C}}((n+2)z) + \cancel{exp_{\mathbb{C}}(-nz)} + exp_{\mathbb{C}}(nz) + exp_{\mathbb{C}}(-(n+2)z)$$

$$- exp_{\mathbb{C}}(nz) - \cancel{exp_{\mathbb{C}}(-nz)}\Big)$$

$$= ch((n+2)z)$$ Donc $P(n+2)$ vraie.

Par récurrence à 2 pas :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{C}, T_n(ch\, z) = ch(nz)}$$

3.(b) $T_2 = 2XT_1 - T_0 = \boxed{2X^2 - 1}$

$T_3 = 2X(2X^2 - 1) - X = \boxed{4X^3 - 3X}$

3.(c) Voir TD9

3.(d) Voir TD9

4.(a) $\forall z \in \mathbb{C},\ T_n(\mathrm{ch}\, z) = \mathrm{ch}(nz)$

donc $\forall \theta \in \mathbb{R},\ T_n(\mathrm{ch}(i\theta)) = \mathrm{ch}(in\theta)$

ie $\boxed{T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)}$

4.(b) $\cos(n\theta) = \mathrm{Re}\left((e^{i\theta})^n\right) = \mathrm{Re}\left[(\cos\theta + i\sin\theta)^n\right]$

$= \mathrm{Re}\left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} i^k \sin^k\theta . \cos^{n-k}\theta\right]$

or $i^k \in \mathbb{R}$ si k pair et $i^k \in i\mathbb{R}$ si k impair

donc $\cos(n\theta) = \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} i^{2k} . \sin^{2k}\theta . \cos^{n-2k}\theta$

$= \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} (-1)^k (1 - \cos^2\theta)^k \cos^{n-2k}\theta$

$= \boxed{\sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} (\cos^2\theta - 1)^k . \cos^{n-2k}\theta}$

4(c) On pose $Q_n(X) = \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} (X^2-1)^k X^{n-2k}$

D'après 4.(b) :

$\forall x \in [-1, 1], \quad T_n(x) = Q_n(x)$

car $\cos \theta \in [-1, 1]$

Le polynôme $T_n - Q_n$ a donc une infinité de racines.

c'est donc le polynôme nul :

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad T_n(x) - Q_n(x) = 0$

ie $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad T_n(x) = \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} (x^2-1)^k x^{n-2k}}$

5.(a) Soit $x \in [-1, 1]$, donc $\sqrt{1-x^2}$ défini.

$(x + i\sqrt{1-x^2})^n + (x - i\sqrt{1-x^2})^n$

$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} i^k (1-x^2)^{k/2} x^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-i)^k (1-x^2)^{k/2} x^{n-k}$

or $i^k + (-i)^k = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ impair} \\ 2(-1)^{k/2} & \text{si } k \text{ pair} \end{cases}$

donc $\left(x+i\sqrt{1-x^2}\right)^n+\left(x-i\sqrt{1-x^2}\right)^n$

$$= \sum_{0\leq 2k\leq n}\binom{n}{2k}2(-1)^k(1-x^2)^k x^{n-2k} = \boxed{2T_n(x)}$$

5.(b) $\forall x\geq 0$, $ch(x)=\frac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right)$

ch est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et :

$$\forall x\geq 0,\ ch'(x)=\frac{1}{2}\left(e^x-e^{-x}\right)=\underbrace{\frac{1}{2}e^{-x}}_{>0}\underbrace{\left(e^{2x}-1\right)}_{\text{du signe de } x}$$

Donc ch continue et str.^{t} $\nearrow$ sur $\mathbb{R}^+$.

Elle est donc bijective de $\mathbb{R}^+$ sur $\left[ch(0), \lim_{+\infty} ch\right[= [1,+\infty[$

Pour $x\geq 0$, $y\geq 1$: $ch(x)=y$

$$\iff e^x+e^{-x}=2y$$

$$\underset{z=e^x}{\iff} z^2-2yz+1=0 \qquad \Delta=4(y^2-1)\geq 0$$

$$\iff z=y\pm\sqrt{y^2-1}$$

$\underset{z \geq 1}{\iff} z = y + \sqrt{y^2 - 1} \iff x = \ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right)$ 7

donc $\boxed{\mathrm{argch}(y) = \ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right)}$

$y - \sqrt{y^2 - 1} \geq 1$

$\iff \sqrt{y^2 - 1} \leq y - 1$

$\iff y \geq 1$ et $y^2 - 1 \leq y^2 - 2y + 1$

$\iff y \geq 1$ et $y \leq 1$

$\iff y = 1$. Et ds ce cas: $y - \sqrt{y^2 - 1} = y + \sqrt{y^2 - 1} = 1$

5.(c) $\forall z \geq 0$, $T_n(\mathrm{ch}\, z) = \mathrm{ch}(nz)$

on pose $x = \mathrm{ch}(z)$ donc $x \geq 1$ et $z = \mathrm{argch}(x)$

$\boxed{\forall x \geq 1,\ T_n(x) = \mathrm{ch}(n . \mathrm{argch}\, x)}$

$T_n(x) = \frac{1}{2}\left(e^{n . \mathrm{argch}\, x} + e^{-n\, \mathrm{argch}\, x}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right)^n + \left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right)^{-n}\right)$

8

et $\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{-n} = \dfrac{1}{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n} \times \dfrac{\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n}{\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n}$

$$= \frac{\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n}{\left(x^2-x^2+1\right)^n} = \left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n$$

donc $\boxed{\forall x \geq 1,\ T_n(x) = \frac{1}{2}\left(\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n + \left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n\right)}$

<u>5.(c)</u> Si $x \leq -1$ alors $-x \geq 1$.

D'après 3.(c) :

$$T_n(x) = (-1)^n T_n(-x) = \frac{(-1)^n}{2}\left(\left(-x+\sqrt{x^2-1}\right)^n + \left(-x-\sqrt{x^2-1}\right)^n\right)$$

$$= \boxed{\frac{1}{2}\left(\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n + \left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n\right)}$$

EXERCICE

1. le dé pipé donne 6 avec proba $\frac{3}{8}$

et $i \in [\![1,5]\!]$ avec proba $\frac{1}{8}$.

En effet si on note p_i la proba d'avoir $i \in [\![1,6]\!]$ on a :

$p_1 + \dots + p_6 = 1$ et $p_6 = 3p_5 = 3p_4 = \dots = 3p_1$

On note $N =$ " on a choisi un dé normal "

$P =$ " ——— pipé "

$F_i =$ " la face i apparaît " pour $i \in [\![1,6]\!]$

$$\mathbb{P}(F_6) = \mathbb{P}(N)\mathbb{P}_N(F_6) + \mathbb{P}(P) \times \mathbb{P}_P(F_6) \quad \text{(probas totales)}$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{8} = \frac{1}{9} + \frac{1}{8} = \boxed{\frac{17}{72}}$$

$$\mathbb{P}(F_k) = \mathbb{P}(N)\mathbb{P}_N(F_k) + \mathbb{P}(P) \times \mathbb{P}_P(F_k), \quad k \in [\![1,5]\!]$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{9} + \frac{1}{24} = \boxed{\frac{11}{72}}$$

vérif : $\mathbb{P}(F_1) + \dots + \mathbb{P}(F_6) = 1$ ok !

$$\mathbb{P}_{F_6}(P) = \frac{\mathbb{P}_P(F_6)\mathbb{P}(P)}{\mathbb{P}(F_6)} = \frac{\frac{3}{8} \times \frac{1}{3}}{\frac{17}{72}} = \boxed{\frac{9}{17}}$$

2.(a) $\mathbb{P}(\overline{A}) = \dfrac{\binom{2}{2}}{\binom{3}{2}} = \dfrac{1}{3}$ donc $\mathbb{P}(A) = \boxed{\dfrac{2}{3}}$

$S =$ "la somme des résultats $= 12$" $=$ "obtenir 6 et 6"

$$\mathbb{P}_S(A) = 1 - \mathbb{P}_S(\overline{A}) = \boxed{\frac{9}{11}}$$

car $$\mathbb{P}_S(\overline{A}) = \frac{\mathbb{P}_{\overline{A}}(S)\,\mathbb{P}(\overline{A})}{\mathbb{P}(S)} = \frac{\left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \frac{1}{3}}{\mathbb{P}_{\overline{A}}(S) \times \mathbb{P}(\overline{A}) + \mathbb{P}_A(S) \times \mathbb{P}(A)}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \frac{1}{3}}{\left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \times \frac{3}{8} \times \frac{2}{3}} = \frac{2}{11}$$

2.(b) $T =$ " somme $= 7$ " $=$ "obtenir 2 et 5 ou 1 et 6 ou 3 et 4"

$$\mathbb{P}_T(\overline{A}) = \frac{\mathbb{P}_{\overline{A}}(T)\,\mathbb{P}(\overline{A})}{\mathbb{P}_{\overline{A}}(T)\,\mathbb{P}(\overline{A}) + \mathbb{P}_A(T)\,\mathbb{P}(A)}$$

⚠ les dés sont distinguables

$$= \frac{6 \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \frac{1}{3}}{6 \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{6} \times \frac{1}{8} \times 4 + \frac{1}{6} \times \frac{3}{8} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{8}\right) \times \frac{2}{3}}$$

$= \dfrac{1}{3}$ donc $\mathbb{P}_T(A) = \boxed{\dfrac{2}{3}}$

2.(c) On vient de voir que :

$$P(B) = P(T) = 6 \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \frac{1}{3} + \left[\frac{1}{6} \times \frac{1}{8} \times 4 + \frac{1}{6} \times \frac{3}{8} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{8}\right] \times \frac{2}{3}$$

$$= \boxed{\frac{1}{6}}$$

$$P_A(B) = P_A(T) = \left[\frac{1}{6} \times \frac{1}{8} \times 4 + \frac{1}{6} \times \frac{3}{8} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{8}\right]$$

$$= \boxed{\frac{1}{6}} = P(B) \quad \text{donc} \quad \boxed{A \perp\!\!\!\perp B}$$