Correction du DM 7

1. $\lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{\sin t}\right)=?$

$$\frac{1}{t}-\frac{1}{\sin t}=\frac{\sin t - t}{t\sin t}$$

or $\sin t \underset{t\to 0}{\sim} t$ donc $t.\sin(t) \underset{t\to 0}{\sim} t^2$

et $\sin t \underset{t\to 0}{=} t-\frac{t^3}{6}+o(t^3)$ donc $\sin t - t \underset{t\to 0}{\sim} \frac{t^3}{6}$

On a donc. $\frac{1}{t}-\frac{1}{\sin t} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{t}{6}$

donc $\lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{\sin t}\right)=\lim_{t\to 0}\frac{t}{6}=\boxed{0}$

$\lim_{t\to 0}\left(-\frac{1}{t^2}+\frac{\cos t}{\sin^2 t}\right)=?$

$$-\frac{1}{t^2}+\frac{\cos t}{\sin^2 t}=\frac{t^2\cos t-\sin^2 t}{t^2\sin^2 t}$$

De même $t^2\sin^2 t \underset{t\to 0}{\sim} t^4$

et $\sin t \underset{t\to 0}{=} t-\frac{t^3}{6}+o(t^4)$

donc $\sin^2 t \underset{t\to 0}{=} t^2-\frac{2t^4}{6}+o(t^4)$

$\cos t \underset{t\to 0}{=} 1-\frac{t^2}{2}+o(t^2)$

donc $t^2\cos t \underset{t\to 0}{=} t^2-\frac{t^4}{2}+o(t^4)$

D'où $t^2\cos t - \sin^2 t \underset{t\to 0}{=} t^2 - \frac{t^4}{2} - t^2 + \frac{t^4}{3} + o(t^4)$

$$\underset{t\to 0}{=} -\frac{t^4}{6} + o(t^4)$$

donc $t^2\cos t - \sin^2 t \underset{t\to 0}{\sim} -\frac{t^4}{6}$

Finalement $-\frac{1}{t^2} + \frac{\cos t}{\sin^2 t} \underset{t\to 0}{\sim} -\frac{1}{6}$

et donc $\lim\limits_{t\to 0}\left(-\frac{1}{t^2} + \frac{\cos t}{\sin^2 t}\right) = \boxed{-\frac{1}{6}}$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x - \sin x\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}} = ?$

$$\left(e^x - \sin x\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}} = e^{\frac{1}{\sin^2 x}\cdot\ln\left(e^x - \sin x\right)}$$

$$e^x - \sin x \underset{x\to 0}{=} \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right) - x + o(x^2)$$

$$\underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

et $\ln\left(e^x - \sin x\right) = \ln\left[1 + (\underbrace{e^x - \sin x - 1}_{\xrightarrow[x\to 0]{} 0})\right]$

$$\underset{x\to 0}{\sim} e^x - \sin x - 1$$

or $e^x - \sin x - 1 \underset{x\to 0}{=} \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ donc $e^x - \sin x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$

d'où $\ln(e^x - \sin x) \underset{x \to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$

Autre rédaction : $\ln(e^x - \sin x) \underset{x \to 0}{=} \ln\Big(1 + \underbrace{\dfrac{x^2}{2} + o(x^2)}_{\xrightarrow[x \to 0]{} 0}\Big)$

$\underset{x \to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$

$\underset{x \to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$

Comme $\sin^2 x \underset{x \to 0}{\sim} x^2$

on a : $\dfrac{1}{\sin^2 x} \ln(e^x - \sin x) \underset{x \to 0}{\sim} \dfrac{1}{2}$

donc $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{\sin^2 x} \ln(e^x - \sin x) = \dfrac{1}{2}$

d'où $\lim\limits_{x \to 0} (e^x - \sin x)^{\frac{1}{\sin^2 x}} = e^{1/2} = \boxed{\sqrt{e}}$ par composition de limites

3) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x} - \ln(1+x) + \ln 2 - 1}{e^x - ex} = ?$ $= f(x)$

On se ramène en 0 en posant $x = 1 + h$ ie $h = x - 1$

$$\sqrt{x} - \ln(1+x) + \ln 2 - 1 = \sqrt{1+h} - \ln(2+h) + \ln 2 - 1$$

or $\sqrt{1+h} \underset{h \to 0}{=} 1 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{8} + \frac{h^3}{16} + o(h^3)$

$$\ln(2+h) \underset{\uparrow}{=} \ln 2 + \ln\left(1+\frac{h}{2}\right) \underset{h \to 0}{=} \ln 2 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{8} + \frac{h^3}{24} + o(h^3)$$

par substitution

<u>Astuce !</u>

donc à l'ordre 3 : $\sqrt{1+h} - \ln(2+h) + \ln 2 - 1$

$$\underset{h \to 0}{=} \cancel{1} + \cancel{\frac{h}{2}} - \cancel{\frac{h^2}{8}} + \frac{h^3}{16} - \cancel{\ln 2} - \cancel{\frac{h}{2}} + \cancel{\frac{h^2}{8}} - \frac{h^3}{24} + \cancel{\ln 2} - \cancel{1} + o(h^3)$$

$$\underset{h \to 0}{=} \frac{h^3}{48} + o(h^3)$$

donc $\sqrt{1+h} - \ln(2+h) + \ln 2 - 1 \underset{h \to 0}{\sim} \frac{h^3}{48}$

donc $\sqrt{x} - \ln(1+x) + \ln 2 - 1 \underset{x \to 1}{\sim} \frac{(x-1)^3}{48}$

D'autre part $e^x - ex = e^{1+h} - e(1+h) = e \times (e^h - 1 - h)$

$$\underset{h \to 0}{=} e \times \left(\cancel{1} + \cancel{h} + \frac{h^2}{2} - \cancel{1} - \cancel{h}\right) + o(h^2)$$

$$\underset{h \to 0}{=} \frac{e}{2} \times h^2 + o(h^2)$$

donc $e^{1+h} - e \times (1+h) \underset{h \to 0}{\sim} \frac{e}{2} \times h^2$

d'où $e^x - e \times x \underset{x \to 1}{\sim} \frac{e}{2}(x-1)^2$

Finalement $f(x) \underset{x \to 1}{\sim} \frac{(x-1)}{e \times 24}$

donc $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \frac{x-1}{e \times 24} = \boxed{0}$