Correction du DM8

Exercice

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} P(X>k) = \sum_{k=0}^{N}\left(\sum_{i=k+1}^{N} P(X=i)\right)$

$$= \sum_{i=1}^{N}\left(\underbrace{\sum_{k=0}^{i-1} P(X=i)}_{i\times P(X=i)}\right) = \mathbb{E}(X) - 0\times P(X=0)$$

$$= \boxed{\mathbb{E}(X)}$$

2 Il est clair que $X(\Omega) \subset [\![0,N]\!]$.

Si $k\in[\![0,N]\!]$, $[X\leq k]$ = "on a tiré que des boules avec un n° $\leq k$"

donc $P(X\leq k) = \dfrac{\binom{k}{n}}{\binom{N}{n}}$ donc $P(X>k) = 1 - \dfrac{\binom{k}{n}}{\binom{N}{n}}$

D'où $\displaystyle\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{N} P(X>k)$

$$= (N+1) - \frac{1}{\binom{N}{n}}\underbrace{\sum_{k=0}^{N}\binom{k}{n}}_{=\binom{N+1}{n+1}} \text{ d'après l'exercice 5}$$

$$= N+1 - \frac{N+1}{n+1}$$

$$= \boxed{\frac{n(N+1)}{n+1}}$$

Preuve de la formule de l'exercice 5 :

$$\sum_{k=0}^{N}\binom{k}{n} = \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1}\underbrace{\binom{k}{n}}_{\substack{=0\\ \text{car } k<n}}}_{=0} + \sum_{k=n}^{N}\binom{k}{n}$$

$$= \sum_{k=n}^{N}\binom{k}{n} = \sum_{k=n}^{N}\left[\binom{k+1}{n+1} - \binom{k}{n+1}\right]$$ d'après la formule de Pascal

$$= \binom{N+1}{n+1} - \underbrace{\binom{n}{n+1}}_{=0} = \boxed{\binom{N+1}{n+1}}$$

somme télescopique