Correction du DM9

EXERCICE 1

1. $E = \left\{ \begin{pmatrix} a+b & b \\ -b & a-b \end{pmatrix} \ / \ (a,b) \in \mathbb{K}^2 \right\}$

$= \left\{ a.\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{M_1} + b.\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}}_{=M_2} \ / \ (a,b) \in \mathbb{K}^2 \right\}$

$= \mathrm{Vect}(M_1, M_2)$

donc E sev de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ dont une famille génératrice est (M_1, M_2)

Comme M_1 et M_2 ne sont pas proportionnelles, la famille (M_1, M_2) est libre. Donc (M_1, M_2) base de E

2. Soit $(M, N) \in E^2$.

On note $M = \begin{pmatrix} a+b & b \\ -b & a-b \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} \alpha+\beta & \beta \\ -\beta & \alpha-\beta \end{pmatrix}$

Alors $M \times N = \begin{pmatrix} (a+b)(\alpha+\beta) - b\beta & (a+b)\beta + b(\alpha-\beta) \\ -b(\alpha+\beta) - \beta(a-b) & -b\beta + (a-b)(\alpha-\beta) \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} a\alpha + b\alpha + a\beta & a\beta + b\alpha \\ -b\alpha - a\beta & a\alpha - a\beta - b\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s+t & t \\ -t & s-t \end{pmatrix}$

avec $s = a\alpha \in \mathbb{K}$ et $t = a\beta + b\alpha \in \mathbb{K}$

donc $M \times N \in E$ cqfd.

3. $\begin{pmatrix} a+b & b \\ -b & a-b \end{pmatrix}$ inversible $\overset{th}{\Longleftrightarrow} (a+b)\times(a-b)-(-b)\times b \neq 0$

$\Longleftrightarrow a^2-b^2+b^2 \neq 0 \Longleftrightarrow a^2 \neq 0 \Longleftrightarrow \boxed{a \neq 0}$

EXERCICE 2

1 (a) $S_{2(n+1)} - S_{2n} = (-1)^{2n+2} a_{2n+2} + (-1)^{2n+1} a_{2n+1}$ (Charles)

$= a_{2n+2} - a_{2n+1} \leq 0$ car $(a_n) \searrow$

donc $(S_{2n}) \searrow$

$S_{2(n+1)+1} - S_{2n+1} = S_{2n+3} - S_{2n+1} = (-1)^{2n+3} a_{2n+3} + (-1)^{2n+2} a_{2n+2}$

$= -a_{2n+3} + a_{2n+2} \geqslant 0$ car $(a_n) \searrow$

donc $(S_{2n+1}) \nearrow$

$S_{2n+1} - S_{2n} = (-1)^{2n+1} \cdot u_{2n+1}$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} |S_{2n+1} - S_{2n}| = \lim\limits_{n \to +\infty} |u_{2n+1}|$

$= |0| = 0$

car $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (S_{2n+1} - S_{2n}) = 0$

On en déduit que (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.

1.(b) D'après le théorème des suites adjacentes, elles convergent vers une même limite.

D'après le théorème des suites extraites recouvrantes, (S_n) converge elle aussi vers cette limite.

On en déduit que $\sum_{n\geq 0}(-1)^n a_n$ converge.

1.(c) On a donc si $S = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n$

$$S_{2p-1} \leq S \leq S_{2p}$$

On a donc $|S - S_{2p}| = \left|\sum_{k=2p+1}^{+\infty}(-1)^k a_k\right| \leq S_{2p} - S_{2p+1} = a_{2p+1}$

d'où l'inégalité demandée pour n impair

$$|S - S_{2p-1}| = \left|\sum_{k=2p}^{+\infty}(-1)^k a_k\right| \leq S_{2p} - S_{2p+1} = a_{2p+1}$$

$$\leq a_{2p} \text{ car } (a_n) \searrow$$

d'où l'inégalité demandée pour n pair

2.(a) $\boxed{\text{Si } \alpha \leqslant 0}$, $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ diverge grossièrement

$\boxed{\text{Si } \alpha > 1}$ $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge et $\frac{1}{n^\alpha} = \left|\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right|$

donc $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge absolument

$\boxed{\text{Si } 0 < \alpha \leqslant 1}$ $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ ne converge pas absolument

Mais si on pose $a_n = \frac{1}{n^\alpha} = e^{-\alpha \ln(n)}$

alors $(a_n) \searrow$ de limite nulle et $\forall n, a_n \geqslant 0$ (puisque $\alpha > 0$)

donc d'après 1.(b), $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge.

Bilan : $\begin{cases} \alpha > 1 : \text{converge absolue} \\ 0 < \alpha \leqslant 1 : \text{semi-convergence} \\ \alpha \leqslant 0 : \text{divergence} \end{cases}$

2.(b) $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n\geq 1}$ suite décroissante de réels positifs, de limite nulle, donc $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge d'après 1.(b).

De plus $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$

preuve : $\dfrac{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}}{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} = 1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

$\uparrow \frac{1}{(-1)^n} = (-1)^n$

Et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge, $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge

donc $\sum_{n\geq 1} \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}\right)$ diverge

On a donc deux séries de natures différentes dont les termes généraux sont équivalents.

EXERCICE 3

1. Conséquence immédiate du théorème de transfert

2. $\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)}$

$$\forall t \in \mathbb{R},\ G_X(t) = \sum_{k=0}^{1} t^k . \mathbb{P}(X=k) = \mathbb{P}(X=0) + t . \mathbb{P}(X=1)$$
$$= \boxed{1 - p + pt}$$

$\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)}$

$$\forall t \in \mathbb{R},\ G_X(t) = \sum_{k=0}^{n} t^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} . (tp)^k (1-p)^{n-k}$$
$$= \boxed{(tp + 1 - p)^n}$$

$\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,n]\!])}$

$$\forall t \in \mathbb{R},\ G_X(t) = \sum_{k=1}^{n} t^k \, \mathbb{P}(X=k) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} t^k$$
$$= \boxed{\begin{cases} \dfrac{t}{n} \times \dfrac{1 - t^n}{1 - t} & \text{si } t \neq 1 \\ 1 & \text{si } t = 1 \end{cases}}$$

3. $\boxed{\Rightarrow}$ Évident car si $X \overset{\mathcal{L}}{=} Y$ alors $t^X \overset{\mathcal{L}}{=} t^Y$ donc $\mathbb{E}(t^X) = \mathbb{E}(t^Y)$

$\boxed{\Leftarrow}$ Si $\forall t \in \mathbb{R}$, $G_X(t) = G_Y(t)$

alors $\forall t \in \mathbb{R}$, $\sum_{k=0}^{n} t^k . \mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=0}^{n} t^k . \mathbb{P}(Y=k)$

donc par unicité des coeffs d'un polynôme :

$\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\mathbb{P}(X=k) = \mathbb{P}(Y=k)$

ie $X \overset{(\mathcal{L})}{=} Y$

5. $\forall t \in \mathbb{R}$, $G_X'(t) = \sum_{k=1}^{n} k t^{k-1} . \mathbb{P}(X=k)$

donc $G_X'(1) = \sum_{k=1}^{n} k . \mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=0}^{n} k . \mathbb{P}(X=k)$

car $0 \times \mathbb{P}(X=0) = 0$

$= \boxed{\mathbb{E}(X)}$

$\forall t \in \mathbb{R}$, $G_X''(t) = \sum_{k=2}^{n} k(k-1) . t^{k-2} . \mathbb{P}(X=k)$

donc $G_X''(1) = \sum_{k=2}^{n} k(k-1) . \mathbb{P}(X=k) = \mathbb{E}[X(X-1)]$

or $V(X) = \mathbb{E}[X(X-1)] + \mathbb{E}(X) - (\mathbb{E}X)^2$ par Koenig-Huyghens + linéarité de $\mathbb{E}$

donc $\boxed{V(X) = G_X''(1) + G_X'(1) - [G_X'(1)]^2}$