Correction du DS1

Exercice 1 Vu en classe

Exercice 2

1.(a) $\boxed{\binom{n}{p}}$

1.(b).i. On compte le nombre tirages de p boules, avec p boules ayant un n° entre 1 et k, et 0 boules avec un numero entre $k+1$ et n.

Au total : $\binom{k}{p}\binom{n-k}{0} = \boxed{\binom{k}{p}}$

1.(b).ii. Cette fois : $p-1$ boules ont un n° entre 1 et $k-1$, 1 boule a le n° k, et 0 boules ont un n° entre $k+1$ et n : $\binom{k-1}{p-1} \times \binom{1}{1} \times \binom{n-k}{0} = \boxed{\binom{k-1}{p-1}}$

1.(c). Le nombre total de déroulements est : $\binom{n}{p}$

Par disjonction des cas, chaque déroulement donne un plus grand n° égal à un entier $k \in [\![p, n]\!]$ (p au minimum car on tire p boules) et ceci se produit pour $\binom{k-1}{p-1}$ déroulements.

D'après le principe des bergers :

$$\boxed{\binom{n}{p} = \sum_{k=p}^{n} \binom{k-1}{p-1}}$$

2.(a) $\boxed{A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}}$

2.(b) le premier tirage commence par la boule 2 : 1 possibilité

ensuite on tire sans remise $p-1$ boules parmi $n-1$:

A_{n-1}^{p-1} possibilités.

Au total : $1 \times A_{n-1}^{p-1} = \boxed{A_{n-1}^{p-1}}$

3.(a) $\boxed{n^p}$

3.(b) La première boule a un n° entre 1 et $n-1$.

Ensuite pour le fixe :

- Les $p-2$ suivantes peuvent avoir n'importe quel numéro :

n^{p-2}

- La dernière boule a un n° $> k$: $n-(k+1)+1 = n-k$ possibilités

- donc au total : $n^{p-2} \times (n-k)$

Le principe des bergers donne au total :

$$\sum_{k=1}^{n-1} n^{p-2} \times (n-k) = n^{p-2} \times \sum_{k=1}^{n-1} (n-k)$$

$$\underset{k'=n-k}{=} n^{p-2} \times \sum_{k=1}^{n-1} k = n^{p-2} \times \frac{(n-1)n}{2} = \boxed{\frac{n-1}{2} n^{p-1}}$$

3.(c) Pour avoir la somme des n° égale à $p+2$:

→ $p-1$ fois la boule 1 et 1 fois la boule 3

→ $p-2$ fois la boule 1 et 2 fois la boule 2

→ si on ne tire que $p-3$ fois la boule 1, alors on a 3 boules avec n° $\geqslant 2$ ce qui donne une somme $\geqslant p+3$

$\boxed{\text{impossible}}$

Il n'y a donc que 2 cas !

Au total : $1^{p-1} \times 1^{1} \times \binom{p}{p-1} + 1^{p-2} \times 1^{2} \times \binom{p}{p-2}$

$$= p + \frac{p(p-1)}{2} = \boxed{\frac{p(p+1)}{2}}$$

3.(d) Dans ce cas on choisit les deux numéros qui sont tirés : $\binom{n}{2}$ choix

Ensuite on choisit à chaque tirage si on obtient le premier n° ou le second : 2^p choix

Au total : $\binom{n}{2} 2^p$

Mais il faut retrancher les tirages qui ne donnent que le premier numéro ou que le second.

$$\binom{n}{2} 2^p - 2 = \boxed{n(n-1)2^{p-1} - 2}$$

Problème 1

Partie I

Fait en classe

Partie II

1. vu en TD

2. Puisque $(A\setminus B)\cap(B\setminus A)=\emptyset$ on a :

$$\mathbb{1}_{A\Delta B} \underset{I.2.(d)}{=} \mathbb{1}_{A\setminus B}+\mathbb{1}_{B\setminus A} \underset{I.2.(e)}{=} \mathbb{1}_A\times(1-\mathbb{1}_B)+\mathbb{1}_B\times(1-\mathbb{1}_A)$$

$$=\boxed{\mathbb{1}_A+\mathbb{1}_B-2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B}.$$

3.(a) $\mathbb{1}_{A\Delta(B\Delta C)}=\mathbb{1}_A+\mathbb{1}_{B\Delta C}-2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_{B\Delta C}$

$$=\mathbb{1}_A+\mathbb{1}_B+\mathbb{1}_C-2\mathbb{1}_B\mathbb{1}_C-2\mathbb{1}_A(\mathbb{1}_B+\mathbb{1}_C-2\mathbb{1}_B\mathbb{1}_C)$$

$$=\mathbb{1}_A+\mathbb{1}_B+\mathbb{1}_C-2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B-2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_C-2\mathbb{1}_B\mathbb{1}_C+4\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B\mathbb{1}_C$$

De même :

$$\mathbb{1}_{(A\Delta B)\Delta C}=\mathbb{1}_{A\Delta B}+\mathbb{1}_C-2\mathbb{1}_{A\Delta B}\mathbb{1}_C$$

$$=\mathbb{1}_A+\mathbb{1}_B-2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B+\mathbb{1}_C-2(\mathbb{1}_A+\mathbb{1}_B-2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B)\mathbb{1}_C$$

$$=\mathbb{1}_A+\mathbb{1}_B+\mathbb{1}_C-2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B-2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_C-2\mathbb{1}_B\mathbb{1}_C+4\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B\mathbb{1}_C$$

Donc $\mathbb{1}_{(A\Delta B)\Delta C} \equiv \mathbb{1}_{A\Delta(B\Delta C)}$

D'après I.1(b) : $\boxed{(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)}$

3(b) On suppose $A\Delta B = A\Delta C$.

On a donc $\mathbb{1}_{A\Delta B} \equiv \mathbb{1}_{A\Delta C}$

donc $\cancel{\mathbb{1}_A} + \mathbb{1}_B - 2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B \equiv \cancel{\mathbb{1}_A} + \mathbb{1}_C - 2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_C$

d'où $(\mathbb{1}_B - \mathbb{1}_C)\times(1 - 2\mathbb{1}_A) \equiv 0$

mais $\forall x \in E$, $1 - 2\mathbb{1}_A(x) = \pm 1 \neq 0$

donc $\forall x \in E$, $\mathbb{1}_B(x) - \mathbb{1}_C(x) = 0$

Donc $\mathbb{1}_B \equiv \mathbb{1}_C$ donc d'après I.1.(b) : $B = C$

Ainsi $\boxed{A\Delta B = A\Delta C \Rightarrow B = C}$

3(c) De même les résultats de la partie I donnent :

$\mathbb{1}_{A\cap(B\Delta C)} \equiv \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_{B\Delta C} \equiv \mathbb{1}_A \cdot (\mathbb{1}_B + \mathbb{1}_C - 2\mathbb{1}_B \cdot \mathbb{1}_C)$

$\equiv \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B + \mathbb{1}_A\mathbb{1}_C - 2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B\mathbb{1}_C$

mais $\mathbb{1}_A = (\mathbb{1}_A)^2$ puisque $0^2 = 0$ et $1^2 = 1$

donc $\mathbb{1}_{A\cap(B\Delta C)} = \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B + \mathbb{1}_A\mathbb{1}_C - 2\,\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B\mathbb{1}_A\mathbb{1}_C$

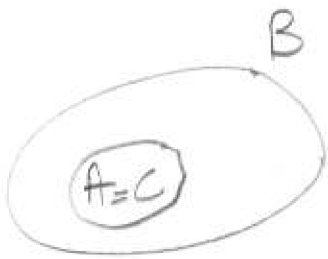
$$= \mathbb{1}_{A\cap B} + \mathbb{1}_{A\cap C} - 2\,\mathbb{1}_{A\cap B}\mathbb{1}_{A\cap C}$$

$$= \mathbb{1}_{(A\cap B)\Delta(A\cap C)}$$

D'où $\boxed{A\cap(B\Delta C) = (A\cap B)\Delta(A\cap C)}$

3.(d)

$A\cup B = A = A\cup C$
mais $B \neq C$



$A\cap B = A = A\cap C$
mais $B \neq C$

ou $A = B = \mathbb{R}$ et $C = \mathbb{R}^+$

$B = \mathbb{R}$ et $A = C = \mathbb{R}^+$

Partie III

1.(a) $A \Delta A = (A \cup A) \setminus (A \cap A) = A \setminus A = \boxed{\emptyset}$

$\emptyset \Delta X = (\emptyset \cup X) \setminus (\emptyset \cap X) = X \setminus \emptyset = \boxed{X}$

1.(b) $\Phi_A(\Phi_A(X)) = A \Delta (A \Delta X)$

$\underset{\text{II.3.(a)}}{=} (A \Delta A) \Delta X = \emptyset \Delta X = \boxed{X}$

2. On a donc $\Phi_A \circ \Phi_A = id_{\mathcal{P}(E)}$

donc Φ_A est bijective de $\mathcal{P}(E)$ vers $\mathcal{P}(E)$

et $\boxed{(\Phi_A)^{-1} = \Phi_A}$

3. $A \Delta X = B \iff \Phi_A(X) = B$

$\iff X = (\Phi_A)^{-1}(B)$

$\iff X = \Phi_A(B)$

$\iff X = A \Delta B$

L'équation $A \Delta X = B$ a donc une unique solution.

4.(a) On a :

$$A \cup X = B \implies \boxed{A \subseteq B}$$

4(b) $\boxed{\Longrightarrow}$ On suppose $A \cup X = B$.

but 1 : $X \subseteq B$ évident car $X \subseteq A \cup X$

but 2 $B \setminus A \subseteq X$

On suppose $x \in B \setminus A$. Alors $x \in B$ et $x \notin A$

mais $x \in B = A \cup X$ donne $x \in A$ ou $x \in X$

conclusion : $x \in X$.

Ainsi $B \setminus A \subseteq X$

$\boxed{\Longleftarrow}$ On suppose $X \subseteq B$ et $B \setminus A \subseteq X$

On a donc $\underbrace{A \cup (B \setminus A)}_{= A \cup B} \subseteq A \cup X \subseteq A \cup B$

donc $A \cup B = A \cup X$ mais $A \subseteq B$ donc $A \cup B = B$

donc $B = A \cup X$.

5.(a) On a $A \cap X = B \implies \boxed{B \subseteq A}$

5.(b) $\boxed{\Longrightarrow}$ On suppose $A \cap X = B$

but 1 : $B \subseteq X$ Evident car $A \cap X \subseteq X$.

<u>but 2</u> $X \subseteq \bar{A} \cup B$

On suppose $x \in X$

<u>cas 1</u> $x \in \bar{A}$ donc $x \in \bar{A} \cup B$

<u>cas 2</u> $x \notin \bar{A}$ donc $x \in A$

donc $x \in A \cap X = B$

donc $x \in B$

donc $x \in \bar{A} \cup B$

Dans les 2 cas : $x \in \bar{A} \cup B$

Donc $\underline{X \subseteq \bar{A} \cup B}$

$\boxed{\Longleftarrow}$ On suppose $B \subseteq X \subseteq \bar{A} \cup B$

Alors $A \cap B \subseteq A \cap X \subseteq A \cap (\bar{A} \cup B)$

mais $B \subseteq A$ donc $A \cap B = B$

et $A \cap (\bar{A} \cup B) = (A \cap \bar{A}) \cup (A \cap B)$

$= \emptyset \cup (A \cap B) = A \cap B = B$

donc $\underline{A \cap X = B}$

Exercice 3

1.(a) et 1.(b) vues en TD

1.(c) Reste à mq $f(A_1) \cap f(A_2) \subseteq f(A_1 \cap A_2)$

On suppose $y \in f(A_1) \cap f(A_2)$.

Alors $y \in f(A_1)$ et $y \in f(A_2)$

donc $\exists x \in A_1 / y = f(x)$ et $\exists z \in A_2 / y = f(z)$

donc $y = f(x) = f(z)$.

Mais f injective donc $x = z$, donc $x \in A_1 \cap A_2$

donc $y \in f(A_1 \cap A_2)$ cqfd.

2.(a) Soit $y \in f(E \setminus A_1)$.

Alors $\exists x \in E \setminus A_1 / y = f(x)$

but $y \in F \setminus f(A_1)$

Par l'absurde si $y \in f(A_1)$ alors $\exists z \in A_1 / y = f(z)$

Mais f injective donc $x = z$. Absurde car $x \notin A_1$ et $z \in A_1$.

Donc $y \notin f(A_1)$ ie $y \in F \setminus f(A_1)$ cqfd.

2.(b) Soit $y \in F \setminus f(A_1)$.

but $y \in f(E \setminus A_1)$.

Comme f surjective : $\exists x \in E \,/\, y = f(x)$.

Par l'absurde si $x \in A_1$ alors $y \in f(A_1)$

Impossible car $y \in F \setminus f(A_1)$

Donc $x \notin A_1$ ie $x \in E \setminus A_1$ et donc $y \in f(E \setminus A_1)$.

cqfd.

2.(c) Conséquence de 2.(a) et 2.(b).

3.(a) $\boxed{\supseteq}$ si $x \in A_1$ alors $f(x) \in f(A_1)$

donc $x \in f^{-1}(f(A_1))$

$\boxed{\subseteq}$ si $x \in f^{-1}(f(A_1))$ alors $f(x) \in f(A_1)$

donc $\exists z \in A_1 \,/\, f(x) = f(z)$

Mais f injective donc $x = z$ donc $x \in A_1$

cqfd.

3.(b) $\boxed{\subseteq}$ Soit $y \in f(f^{-1}(B))$

Alors $\exists x \in f^{-1}(B) \,/\, y = f(x)$

Mais $x \in f^{-1}(B)$ donne $f(x) \in B$.

Donc $y \in B$. cqfd.

$\boxed{\supseteq}$ Soit $y \in B$.

Comme f surjective : $\exists x \in E \,/\, y = f(x)$

Or $f(x) \in B$ donc $x \in f^{-1}(B)$

donc $f(x) \in f(f^{-1}(B))$

Ainsi $y \in f(f^{-1}(B))$ cqfd.