EXERCICE : Calcul d'un produit de nombres complexes

Soit $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite de nombre complexes. On pose $P_0 = 1$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$P_k = \prod_{j=1}^{k}(1 - a_j).$$

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Quelle relation de récurrence très simple existe-t-il entre P_k et P_{k+1} ?
2. Démontrer par récurrence que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$P_k + \sum_{i=1}^{k} a_i P_{i-1} = 1.$$

Dans la suite, on fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et, pout tout $j \in \mathbb{N}$, on pose $a_j = \frac{j}{n}$ de sorte que

$$P_k = \prod_{j=1}^{k}\left(1 - \frac{j}{n}\right).$$

3. (a) Calculer P_n.
   (b) Montrer que, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, on a

$$P_k = \frac{k!}{n^k}\binom{n-1}{k}.$$

   (c) La formule de la question précédente est-elle encore valable pour $k = 0$?
4. Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}\frac{k!}{n^k} = 1.$$

PROBLÈME : Étude d'une suite récurrente

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 > 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + u_n}{2}$.

Partie I : Limite de (u_n)

1. Montrez que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq 1$.
2. En déduire la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. (a) On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $\ell \in \mathbb{R}$.
   Montrer qu'on a $\ell > 1$ et $\ell = \dfrac{\ell^2 + \ell}{2}$. En déduire une contradiction.
   (b) Conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

<u>Partie II</u> : Vitesse de divergence de (u_n)

On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \dfrac{1}{2^n}\ln\left(\dfrac{u_n}{2}\right)$.

1. **Étude de la suite** $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$**.**
   (a) En étudiant le signe de $v_{n+1} - v_n$, montrez que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   (b) Montrez que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leq (u_n)^2$.
   (c) Montrez que : $\forall n \in \mathbb{N}\ v_{n+1} \leq v_n + \dfrac{1}{2^{n+1}}\ln(2)$.
   (d) En déduire que : $\forall n \geq 1,\ v_n \leq v_0 + \ln(2) \times \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$.
   (e) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
2. **Vitesse de convergence de** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$**.** On note $\alpha = \lim v_n$.
   (a) Montrez que : $\forall x > 0,\ \ln(1+x) \leq x$.
   (b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq v_{n+1} - v_n \leq \dfrac{1}{2^{n+1}u_n}$.
   (c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que : $\forall p \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq v_{n+p} - v_n \leq \dfrac{1}{u_n}\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{2^{n+k}}$.
   (d) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq \alpha - v_n \leq \dfrac{1}{2^n u_n}$.
   (e) Exprimez u_n en fonction de v_n.
   (f) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{2\mathrm{e}^{\alpha 2^n}} = 1$.