EXERCICE 1 : Équation trigonométrique

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0, \pi[$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \sin\big((2k+1)x\big)$ en fonction de n et de x.
2. En déduire les solutions dans $]0, \pi[$ de l'équation : $\sin x + \sin(3x) - \sin(4x) + \sin(5x) + \sin(7x) = 0$.

EXERCICE 2 : Suite récurrente du type $u_{n+1} = f(u_n)$

On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 1 + \dfrac{2}{u_n}$.

1. Faire l'étude complète de la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = 1 + \dfrac{2}{x}$.
   Représenter sur le même dessin l'allure de son graphe ainsi que les premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   Que peut-on conjecturer ?
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et strictement positive.
   Cela signifie montrer par récurrence $P(n) =$ « u_n existe et $u_n > 0$ ».
3. On considère les suites extraites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par : $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.
   (a) Déterminer une fonction $g :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
   $v_{n+1} = g(v_n)$ et $w_{n+1} = g(w_n)$.
   (b) Établir que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < v_n < 2$ et $w_n > 2$.
   (c) Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones et convergentes.
   (d) Déterminer leur éventuelle limite.
   On pourra faire le lien avec l'équation $g(\ell) = \ell$.
4. Conclure que (u_n) est convergente.

EXERCICE 3 [*] : Suites récurrentes couplées

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par

$$\begin{cases} v_0 > u_0 > 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{u_n + v_n} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = \dfrac{v_n^2}{u_n + v_n} \end{cases}$$

1. **[*]** Montrer que (u_n) et (v_n) sont bien définies et qu'elles sont strictement positives.
   On montrera par récurrence $P(n) =$ « u_n et v_n existent, $u_n > 0$ et $v_n > 0$ ».
2. **[*]** Montrer que (u_n) et (v_n) sont monotones et convergentes.
3. **[*]** On note $\ell = \lim u_n$ et $L = \lim v_n$.
   (a) **[*]** Vérifier que $(\ell + L)\ell = \ell^2$ et $(\ell + L)L = L^2$.
   Attention est il possible que $\ell + L = 0$.
   (b) **[*]** Calculer $u_{n+1} - v_{n+1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   En déduire les valeurs de ℓ et L en fonction de u_0 et v_0.
4. **[*]** Calculer $\dfrac{u_{n+1}}{v_{n+1}}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire u_n et v_n en fonction de n, u_0 et $a = \dfrac{u_0}{v_0}$.
5. **[*]** À l'aide de ces formules, retrouvez les valeurs de ℓ et L calculées à la question 3.(b).

EXERCICE 4 : Croissances comparées

On rappelle le résultat suivant :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

1. On souhaite montrer que si $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{(\ln n)^\beta}{n^\alpha} = 0$.
   (a) Dans le cas $\beta < 0$, calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^\alpha$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (\ln n)^\beta$.
   En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{(\ln n)^\beta}{n^\alpha} = 0$.
   (b) Procéder de même si $\beta = 0$.
   (c) Dans cette question, on suppose $\beta > 0$ et on note $u_n = \dfrac{\ln n}{n^{\alpha/\beta}}$. En remarquant que :
   $$\ln(u_n) = \ln(n) \times \left(\frac{\ln(\ln n)}{\ln n} - \frac{\alpha}{\beta}\right)$$
   montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \ln(u_n) = -\infty$ puis que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.
   En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{(\ln n)^\beta}{n^\alpha} = 0$.
   Pourquoi n'était-il pas possible de procéder comme dans les cas $\beta < 0$ et $\beta = 0$?
2. On souhaite montrer que si $a > 1$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0$.
   (a) Traiter comme à la question 1. les cas $\alpha < 0$ et $\alpha = 0$.
   (b) Dans cette question, on suppose $\alpha > 0$ et on note $u_n = \dfrac{n^\alpha}{a^n}$.
   Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \ln(u_n)$ et conclure que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0$.
3. **[*]** On souhaite montrer que si $a \in \mathbb{R}$, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$.
   (a) **[*]** Traiter comme à la question 1. les cas $-1 < a < 1$, $a = 1$ puis $a = -1$.
   (b) **[*]** Dans cette question, on suppose $a > 1$ et on note $\lfloor a \rfloor$ la partie entière de a.
   En remarquant que si $n \geq \lfloor a \rfloor + 1$:
   $$\frac{a^n}{n!} = \frac{a}{n} \times \left(\frac{a}{n-1} \times \cdots \times \frac{a}{\lfloor a \rfloor + 1}\right) \times \left(\frac{a}{\lfloor a \rfloor} \times \cdots \times \frac{a}{1}\right)$$
   établir que : $\dfrac{a^n}{n!} \leq \dfrac{a}{n} a^{\lfloor a \rfloor}$.
   En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$.
   (c) **[*]** À partir du cas $a > 1$, montrer que si $a < -1$ on a encore $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$.
4. **[*]** Vérifier que, pour tout $n \geq 1$: $\dfrac{n!}{n^n} \leq \dfrac{1}{n}$.
   En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$.