PROBLÈME 2 - Suites récurrentes linéaires et calcul matriciel

Les deux parties sont indépendantes.

Partie I - Étude d'une suite récurrente linéaire d'ordre 3

On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} v_0 = 0, \quad v_1 = 0, \quad v_2 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+3} = -v_{n+2} + 5v_{n+1} - 3v_n \end{cases}$

1. Elaborer un programme Turbo-Pascal afin de calculer v_{15}.
2. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On note $J(a,b) = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$.
   (a) On pose $R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Donner sans calcul $\mathrm{rg}(R)$. Calculer R^n pour tout $n \geq 2$.
   (b) On pose $D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$. Donner sans calcul $\mathrm{rg}(D)$, en fonction des valeurs des paramètres a et b. Calculer D^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (c) Donner une relation simple entre $J(a,b)$, D et R. En déduire $J(a,b)^n$ pour tout $n \geq 2$.
3. Pour $n \geq 2$, on pose : $V_n = \begin{pmatrix} v_n \\ v_{n-1} \\ v_{n-2} \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   Vérifier que : $\forall n \geq 2$, $V_{n+1} = NV_n$. En déduire la valeur de V_n en fonction de V_2 et N^{n-2}.
4. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
   (b) Montrer que $N = P \times J(1,-3) \times P^{-1}$. En déduire N^n en fonction de P, P^{-1}, $J(1,-3)^n$ et $n \in \mathbb{N}$.
5. Déduire des résultats des questions 2.(c), 3. et 4.(b) la valeur de v_n en fonction de $n \geq 2$. La formule obtenue est-elle vraie pour $n = 0$ ou $n = 1$?
6. Écrire une fonction Scilab qui permet de vérifier le résultat obtenu lorsque $n = 15$.

Partie II [*] - Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Dans cette partie, on propose de redémontrer les formules du cours concernant les suites récurrentes linéaires d'ordre 2 réelles et de les généraliser au cas complexe. ***Il est donc interdit d'utiliser toute formule du cours*** *concernant ces suites : tout doit être redémontrer de façon matricielle, en suivant l'énoncé.*

Soient $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ tels que $b \neq 0$. On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ récurrente linaire d'ordre 2 à valeurs complexes, c'est-à-dire une suite définie par

$$\begin{cases} (u_0, u_1) \in \mathbb{C}^2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \end{cases}$$

1. Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ vérifiant la relation :
   $$(M - \alpha I_2)(M - \beta I_2) = 0_2,$$
   où $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. On pose $Q = M - \beta I_2$.
   (a) Montrer que : $Q^2 = (\alpha - \beta)Q$. En déduire Q^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   (b) On suppose $\alpha \neq \beta$ et $n \geq 1$. Montrer que :
   $$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \beta^{n-k} (\alpha - \beta)^{k-1} = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}.$$

(c) On suppose que $\alpha = \beta$ et $n \geq 1$. Montrer que :

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \beta^{n-k} (\alpha - \beta)^{k-1} = n\beta^{n-1}.$$

(d) Donner une expression de M en fonction de I_2 et Q. En déduire pour $n \geq 1$, la matrice M^n en fonction de I_2, Q et n ; pour cela on distinguera les cas $\alpha = \beta$ et $\alpha \neq \beta$.

2. (a) Pour $n \geq 1$, on pose : $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix}$. Montrer qu'il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que :

$$\forall n \geq 1, \qquad U_{n+1} = MU_n.$$

En déduire la valeur de U_n en fonction de U_1 et M^{n-1}, pour $n \geq 1$.

(b) Montrer que M satisfait la relation : $M^2 - aM - bI_2 = 0_2$.
On note α et β les racines dans $\mathbb{C}$ de $r^2 - ar - b = 0$. Vérifier que $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ et : $(M - \alpha I_2)(M - \beta I_2) = 0_2$.

(c) À l'aide des résultats de la première question, montrer que si $\alpha = \beta$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = n\beta^{n-1}u_1 + (1-n)\beta^n u_0$$

et que si $\alpha \neq \beta$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \beta^n u_0 + \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}(u_1 - \beta u_0)$$