ECS1.1 - DEVOIR MAISON N ° 6 **Année scolaire 2013-2014**
À rendre le Lundi 6 Janvier 2013

<u>PROBLÈME</u> - Polynômes de Tchebychev

On définit la fonction *exponentielle complexe* sur $\mathbb{C}$ en posant, pour $z \in \mathbb{C}$:

$$\exp_{\mathbb{C}}(z) = e^a \times e^{ib} = e^a \times \big(\cos(b) + i\sin(b)\big)$$

où $a = \mathcal{R}e(z)$, $b = \text{Im}(z)$, e^a désigne l'exponentielle réelle de a, et e^{ib} désigne l'exponentielle de l'imaginaire pur ib définie par $e^{ib} = \cos(b) + i\sin(b)$.
En particulier si $z \in \mathbb{R}$: $\exp_{\mathbb{C}}(z) = e^z$.
Et si $z \in i\mathbb{R}$, ie $z = ix$ avec $x \in \mathbb{R}$: $\exp_{\mathbb{C}}(z) = e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$.

1.(a) [*] Vérifier que, pour tout $z \in \mathbb{C}$: $\exp_{\mathbb{C}}(z) \neq 0$. (*Vérifier que* $|\exp_{\mathbb{C}}(z)| = e^{Re(z)}$)

1.(b) [*] Montrer que si $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, on a $\exp_{\mathbb{C}}(z_1 + z_2) = \exp_{\mathbb{C}}(z_1) \times \exp_{\mathbb{C}}(z_2)$.

1.(c) [*] Établir que si $z \in \mathbb{C}$: $\exp_{\mathbb{C}}(z) = 1 \iff \exists k \in \mathbb{Z}/\ z = [2ik\pi]$.

Pour tout nombre complexe z, on pose $ch(z) = \dfrac{1}{2}\big(\exp_{\mathbb{C}}(z) + \exp_{\mathbb{C}}(-z)\big)$ et $sh(z) = \dfrac{1}{2}\big(\exp_{\mathbb{C}}(z) - \exp_{\mathbb{C}}(-z)\big)$.
Les fonctions ch et sh sont appelées respectivement fonctions *cosinus hyperbolique* et *sinus hyperbolique.*

2.(a) Montrer que $\forall z \in \mathbb{C},\ ch^2(z) - sh^2(z) = 1$. (*Utiliser 1.(b)*)

2.(b) Montrer que $\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2,\ ch(z_1 + z_2) = ch(z_1)ch(z_2) + sh(z_1)sh(z_2)$. (*Utiliser 1.(b)*)

2.(c) Lorsque $x \in \mathbb{R}$ que vaut $ch(ix)$ et que vaut $sh(ix)$? (*en fonction de* $\cos(x)$ *et* $\sin(x)$)

Dans la suite, on étudie la suite $(T_n)_{n \geq 0}$ de polynômes de $\mathbb{C}[X]$, définie par :

$$T_0 = 1, \quad T_1 = X \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n.$$

3. Propriétés de T_n.

3.(a) Calculer T_2 et T_3.

3.(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\forall z \in \mathbb{C},\ T_n(ch(z)) = ch(nz)$. (*Procéder par récurrence à deux pas*)

3.(c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ T_n \in \mathbb{R}[X]$ et $T_n(-X) = (-1)^n T_n(X)$. (*Procéder par récurrence à deux pas*)

3.(d) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ deg(T_n) = n$ et calculer son coefficient dominant. (*Faire une conjecture sur le terme dominant de* T_n *et la prouver par récurrence à deux pas*)

4. Une première expression de $T_n(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

4.(a) Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$. (*Utiliser la question 2*)

4.(b) [*] À de la formule du binôme et des formules d'Euler, en déduire que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:

$$T_n(\cos\theta) = \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} (\cos\theta^2 - 1)^k \cos^{n-2k}\theta$$

4.(c) On admet dans cette question le résultat suivant (corollaire 22 du chapitre 9) : *si un polynôme P est de degré inférieur ou égal à n, et a au moins $n+1$ racines, alors il est égal au polynôme nul.*
Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad T_n(x) = \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} (x^2 - 1)^k x^{n-2k}$$

5. Une nouvelle expression de $T_n(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

5.(a) [*] Montrer que $\forall x \in [-1, 1],\ T_n(x) = \frac{\left(x + i\sqrt{1-x^2}\right)^n + \left(x - i\sqrt{1-x^2}\right)^n}{2}$. (*Utiliser la formule du binôme*)

5.(b) Montrer à l'aide du théorème de la bijection monotone que ch définit une bijection de $[0, +\infty[$ vers $[1, +\infty[$.
On note argch : $[1, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$ sa bijection réciproque. Vérifier que : $\text{argch}(y) = \ln\big(y + \sqrt{y^2 - 1}\big)$, pour $y \geq 1$.

5.(c) Montrer que $\forall x \geq 1,\ T_n(x) = ch(n\,argch(x))$ (*utiliser 3.(b)*). En déduire que :

$$\forall x \geq 1,\ T_n(x) = \frac{\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)^n + \left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)^n}{2}.$$

5.(e) [*] Montrer que la formule ci-dessus reste valable pour $x \leq -1$. (*Utiliser 3.(c)*)

<u>EXERCICE</u> - Un exemple non trivial d'évènements indépendants

Dans l'expérience suivante, on dispose de trois dés à 6 faces, deux d'entre eux étant normaux et le troisième étant pipé. Un dé est normal si chaque face a même probabilité d'apparaître, alors qu'un dé est pipé si la face 6 est trois fois plus probable que les autres.

1. On choisit au hasard un dé et on le lance. Quelle est la probabilité que la face i apparaisse ? Sachant que le dé a donné un 6, quelle est la probabilité qu'il soit pipé ?

2. On choisit maintenant deux dés parmi les trois disponibles et on les lance. On note $A =$ « le dé pipé fait partie des deux dés choisis ».

2.(a) Calculer $\mathbb{P}(A)$. Quelle est la probabilité de A sachant que la somme des résultats des dés vaut 12 ?

2.(b) Même question avec une somme égale à 7.

2.(c) Soit $B =$ « la somme de résultats des deux dés lancés vaut 7 ». Montrer que A et B sont indépendants.