EXERCICE 1 - Un espace de matrices

Soit $\mathbb{E}$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ de la forme $A = \begin{pmatrix} a+b & b \\ -b & a-b \end{pmatrix}$ avec $(a,b) \in \mathbb{K}^2$.

1. Montrer que $\mathbb{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, en donner une famille génératrice puis une base.

2. Montrer que le produit de deux éléments de $\mathbb{E}$ est encore un élément de $\mathbb{E}$.

3. Soit $A = \begin{pmatrix} a+b & b \\ -b & a-b \end{pmatrix} \in \mathbb{E}$. Montrer que A est inversible si et seulement si $a \neq 0$.

EXERCICE 2 - Critère spécial des séries alternées

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de réels positifs, convergente vers 0. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$.

1.(a) Monter que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.

1.(b) En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n a_n$ est convergente.

[*] 1.(c) Montrer que si $n \in \mathbb{N}$: $\left|\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^k u_k\right| \leq u_n$

2.(a) Étudier la nature de la série$\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$, en fonction du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$.

[*] 2.(b) En déduire un contre-exemple ou $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et les séries $\displaystyle\sum_{n\geq n_0} u_n$ et $\displaystyle\sum_{n\geq n_0} v_n$ sont de nature différente (considérer $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \ldots$).

EXERCICE 3 - Fonction génératrice d'une VARD finie

Soit $n \in \mathbb{N}$. On se donne X une variable discrète finie à valeurs dans $[\![0,n]\!]$. On appelle alors fonction génératrice de X la fonction $G_X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad G_X(t) = \sum_{k=0}^{n} t^k \mathbb{P}(X=k)$$

1. Montrer que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad G_X(t) = \mathbb{E}\big(t^X\big)$$

2. Donner l'expression de G_X lorsque $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$, $X \hookrightarrow \mathcal{U}\big([\![1,n]\!]\big)$.

[*] 3. Si Y est une VARD finie à valeurs dans $[\![0,n]\!]$, montrer que :

$$X \overset{(\mathcal{L})}{=} Y \iff \forall t \in \mathbb{R},\ G_X(t) = G_Y(t)$$

[*] 4. Etablir que :

$$\forall k \in [\![0,n]\!], \quad \mathbb{P}(X=k) = \frac{G_X^{(k)}(0)}{k!}$$

[*] 5. Montrer que $\mathbb{E}(X) = G'_X(1)$, et que $V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - \big(G'_X(1)\big)^2$.