

On voit que $E = \text{vect} \left(\underset{f_1}{x \mapsto \cos x}, \underset{f_2}{x \mapsto \sin x}, \underset{f_3}{x \mapsto 1} \right)$

Donc E est un sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

et $\dim(E) \leq 3$

La famille (f_1, f_2, f_3) est-elle libre?

Soient d_1, d_2, d_3 réels tels que : $d_1 f_1 + d_2 f_2 + d_3 f_3 = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}$

donc $\forall x \in \mathbb{R}, d_1 \cos(x) + d_2 \sin(x) + d_3 = 0$

$$\text{Par } x \in \left] 0, \frac{\pi}{2}, \pi \right]: \begin{cases} d_1 + d_3 = 0 \\ d_2 + d_3 = 0 \\ -d_1 + d_3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{donc } d_1 = d_2 = d_3 = 0$$

Donc (f_1, f_2, f_3) est libre et est donc une base de E

Donc $\dim(E) = 3$.

⚠ Même si $\dim(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}) = +\infty$ on peut étudier des sev de dim finie.