Soit $\mathbb{E}$ espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{E})$ vérifiant :

$$\forall \vec{x} \in \mathbb{E}, \quad \langle f(\vec{x}), \vec{x} \rangle = 0.$$

1. Soit $(\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{E}^2$.

On a $\langle f(\vec{x}+\vec{y}), \vec{x}+\vec{y} \rangle = 0$

donc $\langle f(\vec{x}) + f(\vec{y}), \vec{x}+\vec{y} \rangle = 0$ car f linéaire

donc $\underbrace{\langle f(\vec{x}), \vec{x} \rangle}_{=0} + \langle f(\vec{x}), \vec{y} \rangle + \langle f(\vec{y}), \vec{x} \rangle + \underbrace{\langle f(\vec{y}), \vec{y} \rangle}_{=0} = 0$

donc $\langle \vec{x}, f(\vec{y}) \rangle \underset{\substack{\uparrow \\ \text{symétrie}}}{=} \langle f(\vec{y}), \vec{x} \rangle = - \langle f(\vec{x}), \vec{y} \rangle$

2. Soit $\vec{x} \in \mathrm{Ker}(f)$. Alors $f(\vec{x}) = \vec{0}$

Donc $\forall \vec{y} \in \mathbb{E}$, $\langle \vec{x}, f(\vec{y}) \rangle = - \langle f(\vec{x}), \vec{y} \rangle$

$= - \langle \vec{0}, \vec{y} \rangle = 0$

Donc $\forall \vec{z} \in \mathrm{Im}(f), \langle \vec{x}, \vec{z} \rangle = 0$

donc $\vec{x} \in \mathrm{Im}(f)^{\perp}$

Ainsi $\mathrm{Ker}(f) \subseteq \mathrm{Im}(f)^{\perp}$

D'après le théorème du rang :

$$\dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(E) - \dim(\mathrm{Im}(f))$$
$$= \dim(\mathrm{Im}(f)^{\perp}) \quad [\text{cor } 36]$$

Donc $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f)^{\perp}$.