

# TD6 Ex 12

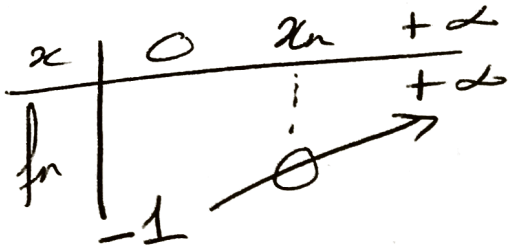
(1)

1. On fixe  $n \in \mathbb{N}^*$ .

On note  $f_n: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction d'expression

$$f_n(x) = x^n + x - 1.$$

$f_n$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^+$  et  $\forall x > 0, f_n'(x) = nx^{n-1} + 1 > 0$



$f_n$  est continue et strictement croissante sur  $]0, +\infty[$ .

D'après le théorème de la bijection monotone,  $f_n$  est bijective de  $\mathbb{R}^+$  vers  $f_n(\mathbb{R}^+) = ]-1, +\infty[$ .

Or  $0 \in ]-1, +\infty[$  donc  $\exists! x_n \in \mathbb{R}^+; f_n(x_n) = 0$

$$\text{ie } \boxed{\exists! x_n > 0; x_n^n + x_n - 1 = 0}$$

2.  $f_n(1) = 1 > 0 = f_n(x_n)$

Comme  $f_n$  strictement croissante:  $1 > x_n$ .

Donc  $(x_n)$  est majorée par 1.

3.  $f_n(x_{n+1}) = x_{n+1}^n + x_{n+1} - 1$

Mais  $f_{n+1}(x_{n+1}) = 0 = x_{n+1}^{n+1} + x_{n+1} - 1$

$$\text{Donc } f_n(x_{n+1}) = x_{n+1}^n - x_{n+1}^{n+1} = \underbrace{x_{n+1}^n}_{>0} \times \underbrace{(1 - x_{n+1})}_{>0} \quad (2)$$

$$\text{donc } f_n(x_{n+1}) > 0 = f_n(x_n)$$

Comme  $f_n$  est strictement croissante:  $x_{n+1} > x_n$ .

Donc  $(x_n)$  est croissante.

4. Par l'absurde on suppose que  $(x_n)$  converge vers un réel  $l$  tel que  $l < 1$ .

Comme  $(x_n)$  est croissante:  $\forall n \geq 1, x_n \geq x_1 > 0$

Par prolongement des inégalités:  $l \geq x_1$  donc  $l > 0$

Ainsi par composée:  $\ln(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln(l)$

Par produit:  $n \times \ln(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (+\infty) \times \underbrace{\ln(l)}_{<0} = -\infty$

Mais  $e^x \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$

donc par composée:  $x_n^n = e^{n \cdot \ln(x_n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Par somme:  $\frac{x_n^n + x_n - 1}{=0} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 + l - 1$

Par unicité de la limite:  $0 = l - 1$  donc  $l = 1$   
C'est absurde car  $l < 1$ .

5. On sait que  $(x_n)$  est croissante et majorée par 1. D'après le théorème de la limite monotone, elle converge vers un réel  $l \leq 1$ .  
Mais d'après la question précédente:  $l \geq 1$ .

Donc  $l = 1$ .

Ainsi  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$