Ex 5 du TD 8

1. $\sqrt{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}+o(x^3)$ à l'ordre 3

car $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)=\frac{3}{8}$ et $\frac{\frac{3}{8}}{3!}=\frac{1}{16}$

donc $\sqrt{1-x} \underset{x\to 0}{=} 1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}-\frac{x^3}{16}+o(x^3)$

donc $\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x} \underset{x\to 0}{=} x+\frac{x^3}{8}+o(x^3)$

donc $\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} \underset{x\to 0}{=} 1+\frac{x^2}{8}+o(x^2)$

2. $\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)$ à l'ordre 3

et $\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$ à l'ordre 2

donc $\sin(x)-x.\cos(x) \underset{x\to 0}{=} x-\frac{x^3}{6}-x.\left(1-\frac{x^2}{2}\right)+o(x^3)$

$\underset{x\to 0}{=} \frac{x^3}{3}+o(x^3)$

Or $\frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1-x+x^2-x^3+o(x^3)$

donc $\frac{\sin(x)-x.\cos(x)}{1+x} \underset{x\to 0}{=} \frac{x^3}{3}+o(x^3)$

3. On pose $x = 2+h$

$$\frac{1}{2+h} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+\frac{h}{2}}$$

or $\displaystyle \frac{1}{1+t} \underset{t\to 0}{=} 1 - t + t^2 + o(t^2)$ et $\displaystyle \lim_{h\to 0} \frac{h}{2} = 0$

donc $\displaystyle \frac{1}{2+h} \underset{h\to 0}{=} \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{4}\right) + o(h^2)$

donc $\displaystyle \frac{1}{x} \underset{x\to 2}{=} \frac{1}{2} - \frac{x-2}{4} + \frac{(x-2)^2}{8} + o\left((x-2)^2\right)$

4. On pose $x = \frac{\pi}{4} + h$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}+h\right) - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos h - \sin h - 1\right)$$

$$\underset{h\to 0}{=} \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 - \frac{h^2}{2} + \frac{h^4}{24} - h + \frac{h^3}{6} - 1\right) + o(h^4)$$

$$\underset{h\to 0}{=} -\frac{\sqrt{2}}{2}h - \frac{\sqrt{2}}{4}h^2 + \frac{\sqrt{2}}{12}h^3 + \frac{\sqrt{2}}{48}h^4 + o(h^4)$$

et $\pi - 4x = -4h$

et $$\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}+h\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\pi - 4x} \underset{h\to 0}{=} \frac{\sqrt{2}}{8} + \frac{\sqrt{2}}{16}h - \frac{\sqrt{2}}{48}h^2 - \frac{\sqrt{2}}{192}h^3 + o(h^3)$$

donc $$\frac{\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\pi - 4x} \underset{x\to \frac{\pi}{4}}{=} \frac{\sqrt{2}}{8} + \frac{\sqrt{2}}{16}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{48}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2 - \frac{\sqrt{2}}{192}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3 + o\left(\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3\right)$$

5. On pose $x = \frac{1}{h}$

$$\sqrt{\frac{1}{h^2}+\frac{1}{h}} - \frac{1}{h}e^{h} = \sqrt{\frac{1+h}{h^2}} - \frac{1}{h}e^{h}$$

comme $x \to +\infty$ on a $h \to 0^+$ donc $h > 0$

et donc $\sqrt{h^2} = h$

donc $$\sqrt{\frac{1}{h^2}+\frac{1}{h}} - \frac{1}{h}e^{h} = \frac{\sqrt{1+h} - e^{h}}{h}$$

$$\underset{h\to 0^+}{=} \frac{1}{h}\left(1+\frac{h}{2}-\frac{h^2}{2}+\frac{h^3}{16}-1-h-\frac{h^2}{2}-\frac{h^3}{6}+o(h^3)\right)$$

$$\underset{h\to 0^+}{=} -\frac{1}{2}-\frac{5h}{8}-\frac{5h^2}{48}+o(h^2)$$

donc $$\sqrt{x^2+x} - xe^{\frac{1}{x}} \underset{x\to+\infty}{=} -\frac{1}{2}-\frac{5}{8x}-\frac{5}{48x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$