Propriétés générales des applications

Partie I :

On considère l'application :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2(x-1)^2+3 \end{array}$$

1. L'application f est-elle injective ? surjective ? bijective ?
2. Donner une restriction de f qui est bijective et déterminer sa réciproque.

Partie II :

Soit E un ensemble. Soient A et B deux parties non vides de E. On note $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. On définit l'application suivante :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(E) & \longrightarrow & \mathscr{P}(A) \times \mathscr{P}(B) \\ X & \longmapsto & (X \cap A, X \cap B) \end{array}$$

1. Déterminer $f(E)$, $f(\emptyset)$, $f(A)$, $f(B)$, $f(A \cup B)$, $f(A \cap B)$.
2. (a) On suppose que f est injective. En déduire une relation entre A, B et E.
   (b) On suppose que $A \cup B = E$. Montrer que f est injective.
3. (a) Soit $X \in \mathscr{P}(E)$ tel que $X \cap A = A$. Que peut-on dire sur X ?
   (b) Soit $X \in \mathscr{P}(E)$ tel que $X \cap B = \emptyset$. Que peut-on dire sur X ?
   (c) On suppose que f est surjective de $\mathscr{P}(E)$ sur $\mathscr{P}(A) \times \mathscr{P}(B)$. Montrer que $A \cap B = \emptyset$.
4. On suppose que $A \cap B = \emptyset$. Soit Y une partie de A et Z une partie de B, déterminer $f(Y \cup Z)$.
5. Déterminer une condition nécesaire et suffisante sur les parties A et B, pour que f soit bijective.