Fonctions caractéristiques

Soit E un ensemble non vide. Pour toute partie A de E, on définit l'application caractéristique de A, notée χ_A, par :

$$\begin{array}{rccl} \chi_A : & E & \longrightarrow & \{0,1\} \\ & x & \longmapsto & \chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases} \end{array}$$

Dans tout ce qui suit, on notera $\overline{A}$ le complémentaire de A dans E.

Partie I : Propriétés des fonctions caractéristiques

Dans cette partie A et B désignant deux sous-ensembles de E.

1. Expliciter les applications χ_E et $\chi_\emptyset$. Ces applications sont-elles injectives sur E, surjectives de E sur $\{0,1\}$?
2. (a) Démontrer que : $A \subset B \Longleftrightarrow \forall x \in E,\ \chi_A(x) \leq \chi_B(x)$.
   (b) En déduire que : $A = B \Longleftrightarrow \chi_A = \chi_B$.
3. Etablir que : $\chi_{\overline{A}} = 1 - \chi_A$.
4. Montrer que : $\chi_A \times \chi_A = \chi_A$.
5. Démontrer que : $\chi_{A\cap B} = \chi_A \times \chi_B$.
6. Etablir que : $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A\cap B}$.
7. On pose : $C = A \backslash B$. Démontrer que : $\chi_C = \chi_A \times \big(1 - \chi_B\big)$.

Partie II : Différence symétrique

Si A et B sont deux parties de E, on appellera différence symétrique de A et B la partie de E suivante :

$$A\Delta B = \big(A\backslash B\big) \cup \big(B\backslash A\big).$$

1. (a) Etablir que pour toutes parties A et B de E, on a : $A\Delta B = \big(A\cup B\big)\backslash\big(A\cap B\big)$.
   (b) Déterminer $\chi_{A\Delta B}$ en fonction de χ_A et de χ_B (on pourra utiliser les résultats de la partie I).
   (c) En déduire que, pour toutes parties A, B et C de E, on a :
   $$A\Delta\big(B\Delta C\big) = \big(A\Delta B\big)\Delta C.$$
2. (a) Donner un exemple d'ensemble E et de trois parties A, B et C vérifiant : $A \cup B = A \cup C$ et $B \neq C$.

(b) On revient au cas général. Etablir que, pour toutes parties A, B et C de E, on a :

$$A\Delta B = A\Delta C \Longrightarrow B = C.$$

Partie III : Résolution de l'équation $A\Delta X = B$ dans $\mathscr{P}(E)$.

Soient A et B deux parties de E fixées. On définit l'application :

$$\Phi_A : \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(E) & \longrightarrow & \mathscr{P}(E) \\ X & \longmapsto & A\Delta X \end{array}$$

1. Soit X une partie de E.
   (a) Calculez $A\Delta A$ et $\emptyset\Delta X$.
   (b) Utilisez les résultats de la partie II pour en déduire la valeur de $\Phi_A(\Phi_A(X))$.
2. En déduire, toujours à l'aide de la partie II, que Φ_A est bijective de $\mathscr{P}(E)$ sur $\mathscr{P}(E)$. Déterminer son application réciproque.
3. Déduire de ce qui précède que, pour toutes parties A et B de E fixées, l'équation $A\Delta X = B$ possède une unique solution, que l'on exprimera en fonction de A et B.