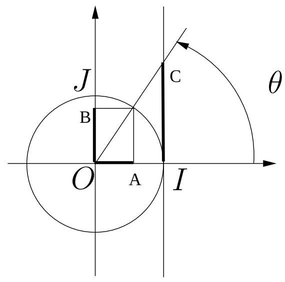
Calcul approché de π

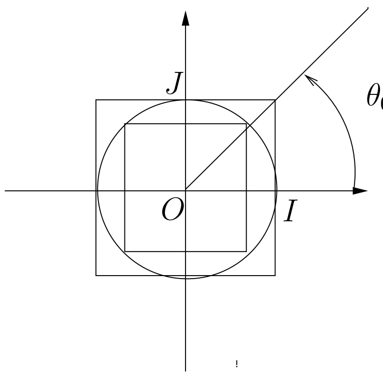
<u>Préliminaire</u>: *On appelle cercle trigonométrique le cercle de centre O et de rayon égal à 1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. D'après les relations métriques usuelles dans un triangle rectangle, les quantités $\cos\theta$, $\sin\theta$ et $\tan\theta$ ont l'interprétation géométrique suivante.*



Sur la figure ci-dessus on a: $OI = OJ = 1$ et de plus $OA = \cos\theta$, $OB = \sin\theta$ et $IC = \tan\theta$.

L'objectif de ce problème est d'étudier une méthode visant à obtenir une valeur approchée de π.
On considère le cercle de centre O et de rayon 1.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note a_n l'aire du polygone régulier à 2^{n+2} côtés <u>exinscrit</u> dans le cercle C (c'est-à-dire extérieur à C, dont les côtés sont tangents à C).
De même, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note b_n l'aire du polygone régulier à 2^{n+2} côtés <u>inscrit</u> dans C (c'est-à-dire intérieur à C et dont les sommets appartiennent à C).
On notera aussi, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\theta_n = \frac{1}{2}\frac{2\pi}{2^{n+2}}$.

1. <u>Cas $n = 0$</u>: a_0 et b_0 sont donc les surfaces respectives de deux carrés (polygones réguliers à 2^2 côtés) qui sont représentés ci-dessous.

   où sur la figure $OI = OJ = 1$. Calculer a_0 et b_0.

2. <u>Cas général: $n \in \mathbb{N}$.</u> Remarquer que l'aire du polygone régulier à 2^{n+2} côtés exinscrit dans C est égale à la somme des aires de 2^{n+2} triangles isocèles en O.

Montrer que la surface de chacun de ces triangles isocèles est égale à $\tan(\theta_n)$. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n = 2^{n+2} \tan(\theta_n).$$

De même, établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$b_n = 2^{n+2} \sin(\theta_n) \cos(\theta_n).$$

3. Vérifier que:

$$\forall t \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[, \quad \frac{\tan(2t)\sin(2t)}{\tan(2t) + \sin(2t)} = \tan(t).$$

4. En déduire que les suites (a_n) et (b_n) vérifient les relations, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_{n+1} = \frac{2a_n b_{n+1}}{a_n + b_{n+1}} \qquad \text{et} \qquad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}.$$

5. (a) Justifier simplement que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n > \pi > b_n$. En déduire que les deux suites (a_n) et (b_n) sont monotones.
   (b) Montrer que les deux suites (a_n) et (b_n) convergent vers π.

6. (a) Ecrire un algorithme qui permet de calculer a_{1000} et b_{1000}.
   (b) Ecrire un algorithme qui permet de calculer la plus petite valeur de n pour laquelle $a_n - b_n < 10^{-5}$.

7. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{\sqrt{\frac{b_n}{a_n}}}{\left(1 + \sqrt{\frac{b_n}{a_n}}\right)^2}(a_n - b_n).$$

8. (a) Etudier les variations sur $\mathbb{R}^+$ de la fonction $f : x \longmapsto \frac{x}{(1+x)^2}$.
   (b) Montrer que la suite (r_n) définie par: $\forall n \in \mathbb{N},\ r_n = \sqrt{\frac{a_n}{b_n}}$ est strictement décroissante et en déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{\sqrt{2}}{(1+\sqrt{2})^2}(a_n - b_n) \leqslant a_{n+1} - b_{n+1} \leqslant \frac{1}{4}(a_n - b_n).$$

9. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a: $0 < a_n - \pi < 2\left(\frac{1}{4}\right)^n$.
   (b) Déduire de l'inégalité précédente une valeur de n pour laquelle a_n sera une valeur approchée de π à 10^{-30} près.