Sommes d'Euler

Soient $n, p \in \mathbb{N}$. Le but de cet exercice est de calculer la somme :

$$S_n^{(p)} = \sum_{k=0}^{n} k^p.$$

1. (a) Donner la valeur de $S_n^{(0)}$.

   (b) Montrer par récurrence que $S_n^{(1)} = \frac{n(n+1)}{2}$.

2. On suppose désormais que $p \geqslant 1$.

   (a) Calculer $(k+1)^{p+1}$ en fonction des k^j, pour $0 \leqslant j \leqslant p+1$.

   (b) En déduire que :

   $$S_n^{(p+1)} + (n+1)^{p+1} = S_n^{(p+1)} + \sum_{j=0}^{p} \binom{p+1}{j} S_n^{(j)}.$$

   (c) Montrer que :

   $$S_n^{(p)} = \frac{1}{p+1} \left((n+1)^{p+1} - \sum_{j=0}^{p-1} \binom{p+1}{j} S_n^{(j)} \right).$$

   (d) Utiliser ce résultat pour retrouver la valeur de $S_n^{(1)}$, puis donner la valeur de $S_n^{(2)}$, $S_n^{(3)}$ et $S_n^{(4)}$.