Calculs dans l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$

Partie I

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{E} = \mathbb{R}^4$ et les vecteurs :

$\overrightarrow{a} = (2, -1, 1, 0)$ $\quad \overrightarrow{b} = (-1, 2, -2, 1)$ $\quad \overrightarrow{c} = (-2, 2, -3, 1)$ $\quad \overrightarrow{d} = (1, 4, -2, 2)$ $\quad \overrightarrow{e} = (8, 2, 5, 1)$

1. Etudier si la famille $(\overrightarrow{c}, \overrightarrow{d}, \overrightarrow{e})$ est libre. Si ce n'est pas le cas, chercher une relation entre ses vecteurs.
2. Montrer que la famille $\mathcal{B} = (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{d})$ est une base de $\mathbb{E}$.
3. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{d}$ et $\overrightarrow{e}$ dans la base $\mathcal{B}$.
4. Soit $\mathbb{G} = \big\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4;\ x - z - t = 0 \text{ et } y - 2t = 0\ \big\}$. Démontrer que $\mathbb{G}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$. En donner une base et la dimension.
5. Démontrer que $\overrightarrow{c} \in \mathbb{G}$. Donner une base de $\mathbb{G}$ contenant le vecteur $\overrightarrow{c}$.
6. Déterminer, suivant les valeurs du réel m, si les vecteurs $\overrightarrow{u_m} = (-2m, 2m, 0, 0)$ et $\overrightarrow{v_m} = (m + 6, -4, m + 2, 0)$ forment une famille libre ou liée.
7. Les vecteurs $\overrightarrow{u_m}$ et $\overrightarrow{v_m}$ forment-ils une base de $\mathbb{G}$?
8. Soit $\mathbb{F} = \mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{c}, \overrightarrow{d}\right)$. Donner un système d'équations cartésiennes de $\mathbb{F}$.
9. Déterminer une base de $\mathbb{F} \cap \mathbb{G}$.

Partie II

On désigne par $\mathbb{E}$ l'espace vectoriel $\mathbb{K}^4$. On note $\mathcal{B} = \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{p}\right)$ une base de $\mathbb{E}$. On considère également les vecteurs suivants :

$$\overrightarrow{a} = -\overrightarrow{u} + 2\overrightarrow{v} + 3\overrightarrow{p} \qquad \overrightarrow{b} = 5\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} - 3\overrightarrow{w} + 2\overrightarrow{p} \qquad \overrightarrow{c} = -2\overrightarrow{u} + 5\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} + 4\overrightarrow{p}$$
$$\overrightarrow{d} = 4\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} + 2\overrightarrow{w} - 2\overrightarrow{p} \qquad \overrightarrow{e} = 3\overrightarrow{u} + 7\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w} + 4\overrightarrow{p}$$

1. Montrer que $\overrightarrow{e}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ et $\overrightarrow{c}$.
2. Déterminer si la famille $\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{d}, \overrightarrow{e}\right)$ est libre.
3. Montrer que la famille $\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{d}\right)$ est une base de $\mathbb{E}$.
4. Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{p}$ dans la base $\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{d}\right)$.
5. On pose $\mathbb{F} = \mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right)$. Déterminer une base de $\mathbb{F}$.
6. Les vecteurs $\overrightarrow{d}$ et $\overrightarrow{e}$ sont-ils des éléments de $\mathbb{F}$? Si oui, donner leurs coordonnées dans la base déterminée à la question précédente.
7. Soit $\mathbb{G}$ l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{E}$ dont les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ sont de la forme $\begin{pmatrix} 4\alpha - 2\beta \\ \alpha + 5\beta \\ 2\alpha + \beta \\ -2\alpha + 4\beta \end{pmatrix}$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.
   Montrer que $\mathbb{G}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$ et en déterminer une base.
8. On considère le vecteur $\overrightarrow{e_m} = (2m - 2)\overrightarrow{u} + (2 - m)\overrightarrow{v} + (5 + 3m)\overrightarrow{w} + (8 + m)\overrightarrow{p}$ où m est un paramètre réel. Déterminer les valeurs de m pour lesquelles $\overrightarrow{e_m}$ appartient à $\mathbb{G}$.
9. Pour quelles valeurs de m la famille $\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{d}, \overrightarrow{e_m}\right)$ est-elle libre ?
10. Pour quelles valeurs de m la famille $\left(\overrightarrow{c}, \overrightarrow{d}, \overrightarrow{e_m}\right)$ est-elle libre ?