Étude d'une suite récurrente par changement de suite

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1$, et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + \frac{1}{2^n}}$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant 1$.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant u_{n+1} - u_n \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}$.
3. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \leqslant u_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$.
4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
5. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = u_n^2$. Exprimer v_n en fonction de n. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.