Calcul d'un produit de nombres complexes

Soit $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite de nombre complexes. On pose $P_0 = 1$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$P_k = \prod_{j=1}^{k}(1 - a_j).$$

<u>Partie I</u> : Cas général

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Quelle relation de récurrence très simple existe-t-il entre P_k et P_{k+1} ?
2. Démontrer par récurrence que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$P_k + \sum_{i=1}^{k} a_i P_{i-1} = 1.$$

<u>Partie II</u> : Étude d'un cas particulier

On fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et, pout tout $j \in \mathbb{N}$, on pose $a_j = \frac{j}{n}$ de sorte que

$$P_k = \prod_{j=1}^{k}\left(1 - \frac{j}{n}\right).$$

1. (a) Calculer P_n.
   (b) Montrer que, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, on a

$$P_k = \frac{k!}{n^k}\binom{n-1}{k}.$$

   (c) La formule de la question précédente est-elle encore valable pour $k = 0$?
2. Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}\frac{k!}{n^k} = 1.$$