Exponentielle complexe

On rappelle que, si $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $b > 0$: $e^a = b \iff a = \ln b$.

De plus, si $z \in \mathbb{C}$, alors on définit l'exponentielle de z par :

$$e^z = e^{\mathscr{R}e(z)} \times e^{i\mathscr{I}m(z)} = e^{\mathscr{R}e(z)} \times \Big(\cos\big[\mathscr{I}m(z)\big] + i\sin\big[\mathscr{I}m(z)\big]\Big)$$

1. Démontrer que, pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, on a : $e^{z+z'} = e^z \times e^{z'}$. En déduire que, pour tout $z \in \mathbb{C}$: $e^z \neq 0$ et $\frac{1}{e^z} = e^{-z}$.
2. Dans la suite, on note $\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^*$ la fonction exponentielle complexe.
   (a) Etablir que, dans $\mathbb{C}$: $e^z = 1 \iff z \equiv 0\ [2i\pi]$.
   En déduire que, dans $\mathbb{C}$: $e^z = e^{z'} \iff z \equiv z'\ [2i\pi]$.
   (b) L'application exp est-elle injective sur $\mathbb{C}$? surjective de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}^*$?
3. On désigne par $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1. Déterminer l'ensemble $\exp^{-1}(\mathbb{U})$.
4. On définit les applications suivantes :

$$\gamma : \begin{cases} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \gamma(z) = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \end{cases} \qquad \sigma : \begin{cases} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \sigma(z) = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} \end{cases}$$

   (a) Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$: $\gamma(z)^2 + \sigma(z)^2 = 1$.
   (b) Pour $z \in \mathbb{C}$, donner une relation entre $\gamma(z)$ et $\sigma(\pi/2 - z)$.
   (c) Reconnaître les restrcitions $\gamma_{|\mathbb{R}}$ et $\sigma_{|\mathbb{R}}$.
   (d) Démontrer que :

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \quad \gamma(z + z') = \gamma(z)\gamma(z') - \sigma(z)\sigma(z') \quad \text{et} \quad \sigma(z + z') = \sigma(z)\gamma(z') + \sigma(z')\gamma(z)$$

5. (a) Montrer que l'équation $\gamma(z) = u$ où u est un **réel** fixé, et z l'inconnue dans $\mathbb{C}$ admet des solutions dans $\mathbb{C}$, que l'on ne demande pas de calculer.
   (*Poser $Z = e^{iz}$ puis se ramener à une équation du second degré...*)
   (b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations $\gamma(z) = 0$ et $\gamma(z) = 2$.