Racines de l'unité

Dans ce problème, n désigne un entier naturel non nul. On pose $\omega_n = e^{i\frac{2\pi}{n}}$.

1. (a) **Question de cours :** Quel nom donne-t-on au complexe ω_n ?
   Déterminer $(\omega_n)^n$, puis donner les solutions complexes de $z^n = 1$ en fonction de ω_n. Combien de solutions obtient-on ?
   Donner les formes algébriques et trigonométriques de ces solutions dans le cas général $n \geqslant 1$, puis dans le cas $n = 3$.

   (b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^3 = 1 + i$.

2. On pose : $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (\omega_n)^k$. Déterminer la valeur de S_n.

3. De même, on pose : $T_n = \prod_{k=0}^{n-1} \omega_n^k$. Déterminer la valeur de T_n.
   On pourra utiliser la relation suivante :
   $$\forall (a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n, \quad \prod_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{a_k} = \mathrm{e}^{\sum_{k=0}^{n-1} a_k}$$

4. On suppose que $n \geqslant 2$.

   (a) Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. Quelle relation simple existe-t-il entre $(\omega_n)^k$ et $\frac{1}{(\omega_n)^k}$?

   (b) Notons $U_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(\omega_n)^k}$. Quelle est la valeur de U_n ?

5. Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$.

   (a) Calculer : $\sum_{k=0}^{n-1} \left(a + b(\omega_n)^k\right)$.

   (b) En déduire l'inégalité :
   $$n|a| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \left|a + b(\omega_n)^k\right|$$

   (c) Établir l'inégalité :
   $$n|b| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \left|b + a(\omega_n)^k\right|$$

   (d) i. Vérifier que, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$: $\overline{(\omega_n)^k} = (\omega_n)^{n-k}$. Montrer alors que :
   $$\sum_{k=0}^{n-1} \left|b + a(\omega_n)^k\right| = \sum_{k=0}^{n-1} \left|a + b(\omega_n)^k\right|$$

   ii. En déduire l'inégalité :
   $$|a| + |b| \leqslant \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left|a + b(\omega_n)^k\right|$$