Caractérisation de la fonction exponentielle

<u>Partie I</u> : Caractérisation des homothéties

On veut déterminer les fonctions $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que : $\begin{cases} (i) & \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ g(x+y) = g(x) + g(y) \\ (ii) & g \text{ est continue sur } \mathbb{R} \end{cases}$

On se donne g solution du problème.

1. Calculer $g(0)$.
2. Etablir que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $g(n) = ng(1)$. Vérifier que cette formule est encore valable pour $n \in \mathbb{Z}$.
3. Etablir que : $\forall r \in \mathbb{Q}$, $g(r) = rg(1)$. (r *s'écrit* $r = \frac{a}{b}$ *avec* $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}^*$...)
4. Soit $x \in \mathbb{R}$.
   (a) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $r_n = \frac{E(10^n x)}{10^n}$. Vérifier que (r_n) est une suites à valeurs dans $\mathbb{Q}$, convergente de limite x.
   (b) En déduire que $g(x) = xg(1)$.
5. Donner alors toutes les solutions du problème.

<u>Partie II</u> : Caractérisation des fonctions exponentielles

On veut déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que : $\begin{cases} (i) & \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x)f(y) \\ (ii) & f \text{ est continue en } 0 \end{cases}$

On se donne f solution du problème.

1. (a) Quelles sont les valeurs possibles de $f(0)$?
   (b) Etablir l'alternative suivante : f est la fonction nulle sur $\mathbb{R}$, ou bien f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
   (c) Montrer que si f n'est pas la fonction nulle alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) > 0$ et On veut déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que : $f(0) = 1$.
2. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Établir que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(nx) = f(x)^n$. Vérifier que c'est encore valable pour $n \in \mathbb{Z}$.
   (b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Etablir que : $\forall r \in \mathbb{Q}$, $f(rx) = f(x)^r$. (r *s'écrit* $r = \frac{a}{b}$ *avec* $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}^*$...)
   (c) En déduire que, si $(x,y) \in \mathbb{R}^2$: $\forall (r,s) \in \mathbb{Q}^2$, $f(rx+sy) = f(x)^r f(y)^s$.
3. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
4. On suppose dans cette question que f n'est pas la fonction nulle. On pose $g = \ln f$.
   (a) Monter que g est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
   (b) Etablir que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $g(x+y) = g(x) + g(y)$.
   (c) En déduire qu'il existe un réel $a > 0$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$.
5. Donner toutes les solutions du problème.