Une équation fonctionnelle

Soit E l'ensemble des fonctions définies et continues sur $\mathbb{R}$ vérifiant la relation

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y).f(x-y) = \big(f(x).f(y)\big)^2.$$

Le but de ce problème est de déterminer les éléments de E.

1. Montrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\phi(x) = e^{x^2}$ est élément de E.
2. Soit f un élément de E.
   (a) Déterminer les valeurs possibles pour $f(0)$.
   (b) Montrer que si $f(0) = 0$ alors f est la fonction nulle.
   (c) Montrer que s'il existe un réel c tel que $f(c) = 0$, alors $f(c/2) = 0$.
   (d) En déduire que s'il existe un réel c tel que $f(c) = 0$, alors f est la fonction nulle $\Big($*On pourra s'intéresser à la suite* $\big(\, f(c/2^n)\,\big)_{n\in\mathbb{N}}\Big)$.
3. Soit f un élément de E tel que f n'est pas la fonction nulle, et telle que $f(0) > 0$.
   (a) Montrer que f est paire.
   (b) On pose $g(x) = \ln f(x)$. Montrer que g est définie sur $\mathbb{R}$.
   (c) Etudier la continuité de g, et déterminer $g(0)$.
   (d) Exprimer $g(x+y) + g(x-y)$ en fonction de $g(x)$ et $g(y)$.
   (e) Montrer que g est paire.
   (f) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ g(nx) = n^2 g(x)$.
   (g) Exprimer $g(nx)$ en fonction de n et de $g(x)$, pour $n \in \mathbb{Z}$.
   (h) Exprimer $g(rx)$ en fonction de r et $g(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{Q}$. En déduire $g(r)$ en fonction de r et de $g(1)$, pour $r \in \mathbb{Q}$.
   (i) Montrer qu'il existe $\lambda > 0$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \lambda^{x^2}$. En déduire les fonctions f éléments de E telles que $f(0) > 0$.
4. Déterminer les fonctions f éléments de E telles que $f(0) < 0$.
5. Conclure.