Deux notions de convergence pour les suites de fonctions

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur I et f une fonction définie sur I. On suppose que les fonctions f_n et la fonction f sont bornées sur I.
Définition 1 : On dira que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge simplement vers f sur I** lorsque :

$$\forall x \in I, \qquad \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x).$$

Définition 2 : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mu_n = \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)|$. On dira que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge uniformément vers f sur I** lorsque :

$$\lim_{n\to+\infty} \mu_n = 0.$$

1. Montrer que la suite de fonction $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in]-1,1]$, $f_n(x) = x^n$, converge simplement sur $]-1,1]$ vers une fonction f que l'on précisera. f est-elle continue sur $]-1,1]$?
2. Montrer que la suite de fonction $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]0,+\infty[, \qquad f_n(x) = \frac{e^{\frac{3x}{n}} - 1}{\sqrt{\frac{x}{n}} \cos\left(\frac{\pi}{2} + \sqrt{\frac{x}{n}}\right)}$$

   converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers une fonction f que l'on précisera.
3. Montrer que la suite de fonction $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]-1,1[, \qquad f_n(x) = \sin\left(\frac{2\pi x}{n}\right) \tan\left[\frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{x}{n}\right)\right]$$

   converge simplement sur $]-1,1[$ vers une fonction f que l'on précisera.
4. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions convergeant simplement vers f sur un intervalle I.
   (a) On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est paire sur I (resp. impaire sur I). Montrer que f est paire sur I (resp. impaire sur I).
   (b) On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est croissante sur I (resp. décroissante sur I). Montrer que f est croissante sur I (resp. décroissante sur I).
   (c) On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur I. La fonction f est-elle nécessairement continue sur I ?
   (d) On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est bijective de I sur $f(I)$. La fonction f est-elle nécessairement bijective de I sur $f(I)$? (considérer $f_n(x) = \frac{x}{n}$ avec $I = [0,1]$).
5. Montrer que la suite de fonction $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [0,1]$, $f_n(x) = \frac{x \ln x}{n}$, converge uniformément sur $[0,1]$ vers la fonction nulle (on commencera par calculer μ_n).
6. Montrer que la suite de fonction $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [0,1]$, $f_n(x) = x\sqrt{n}e^{-nx}$, converge uniformément sur $[0,1]$ vers la fonction nulle (calculer μ_n).
7. Montrer que si une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction f sur I, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur I. (on utilisera le théorème des gendarmes)