# Principe d'inclusion-exclusion

**Notations :**

- Si $E$ est un ensemble fini alors on note $|E|$ son cardinal.
- Si $E$ est un ensemble alors on note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble de ses parties. On rappelle que si $E$ est un ensemble fini, alors : $\left|\mathcal{P}(E)\right| = 2^{|E|}$.
- Si $E$ et $F$ sont deux ensembles alors on note $F^E$ l'ensemble des applications de $E$ dans $F$. On rappelle que si $E$ et $F$ sont finis, alors : $\left|F^E\right| = |F|^{|E|}$.
- Si $E$ et $F$ sont deux ensembles alors on note $\mathrm{Surj}(E, F)$ l'ensemble des applications surjectives de $E$ sur $F$.
- Si $E$ est un ensemble alors on note $\mathrm{Bij}(E)$ l'ensemble des applications bijectives de $E$ sur $E$. On rappelle que si $E$ est fini alors :

$$\left|\mathrm{Bij}(E)\right| = |E|! \quad \text{et} \quad \mathrm{Bij}(E) = \mathrm{Surj}(E, E)$$

- Si $E$ est un ensemble et $A$ une partie de $E$ alors on note $\mathrm{Bij}_A(E)$ l'ensemble des applications bijectives de $E$ sur $E$, qui admettent (au moins) les éléments de $E \backslash A$ pour points fixes. On note aussi $\mathrm{Bij}(E, A)$ l'ensemble des applications bijectives de $E$ sur $E$, qui admettent exactement les éléments de $E \backslash A$ pour points fixes. On rappelle que si $E$ est fini alors :

$$\left|\mathrm{Bij}_A(E)\right| = |A|!$$

On désigne par $F$ un ensemble fini. Soient $\varphi$ et $\psi$ deux applications de $\mathcal{P}(F)$ dans $\mathbb{R}$ :

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathcal{P}(F) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & A & \longmapsto & \varphi(A) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rccc} g : & \mathcal{P}(F) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & A & \longmapsto & \psi(A) \end{array}$$

On dira que $\varphi$ et $\psi$ vérifient la propriété $(*)$ lorsqu'on a, pour toute partie $A$ de $E$ :

$$\varphi(A) = \sum_{B \in \mathcal{P}(A)} \psi(B).$$

**Partie I : Deux exemples**

1. Soient $E$ et $F$ deux ensembles finis. On définit les applications $\varphi$ et $\psi$ de $\mathcal{P}(F)$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{aligned} \varphi(A) &= \text{ nombre d'applications de } E \text{ dans } A = |A|^n \\ \psi(A) &= \text{ nombre d'applications } \underline{\text{surjectives}} \text{ de } E \text{ sur } A \end{aligned}$$

   (a) Soient $B$ une partie de $F$ et $f : E \longrightarrow F$ une application. Montrer que :

$$f \in \mathrm{Surj}(E, B) \quad \Longleftrightarrow \quad f(E) = B$$

   (b) Soient $A$ une partie de $F$.
   Montrer que si $f \in A^E$ et si on pose $B = f(E)$, alors $f \in \mathrm{Surj}(E, B)$ et $B \subset A$.
   En déduire que : $A^E = \bigcup\limits_{B \in \mathcal{P}(A)} \mathrm{Surj}(E, B)$.

   (c) En déduire, à l'aide du lemme des bergers, que $\varphi$ et $\psi$ vérifient la relation $(*)$.

2. Soit $E$ un ensemble fini. On définit les applications $\varphi$ et $\psi$ de $\mathcal{P}(F)$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{aligned} \varphi(A) = &\ \text{nombre de bijections de } E \text{ sur } E \text{ qui admettent les éléments de } E\backslash A \text{ pour points fixes} = |A|! \\ \psi(A) = &\ \text{nombre de bijections de } E \text{ sur } E \text{ dont les points fixes sont } \underline{\text{exactement}} \text{ les éléments de } E\backslash A \end{aligned}$$

   (a) Soit $A$ une partie de $E$.
   Montrer que si $f \in \mathrm{Bij}_A(E)$ et si on définit $B$ partie de $E$ telle que $E\backslash =$ l'ensemble formé des points fixes de $f$, alors $f \in \mathrm{Bij}(E, B)$ et $B \subset A$.
   En déduire que $\mathrm{Bij}_A(E) = \bigcup\limits_{B \in \mathcal{P}(A)} \mathrm{Bij}(E, B)$.

   (b) En déduire, à l'aide du lemme des bergers, que $\varphi$ et $\psi$ vérifient la relation $(*)$.

**Partie II : Principe d'inclusion-exclusion**

Dans cette partie, on se donne un ensemble fini $F$ et deux applications $\varphi$ et $\psi$ de $\mathcal{P}(F)$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant la propriété $(*)$. Le but est de démontrer la formule $(**)$ :

$$\forall A \in \mathcal{P}(F), \quad \psi(A) = \sum_{B \in \mathcal{P}(A)} (-1)^{|A\backslash B|} \varphi(B).$$

1. Soient $A$ et $C$ deux parties de $E$ telles que : $C \subset A$. On pose : $\Delta(A, C) = \sum\limits_{\substack{B \in \mathcal{P}(A) \\ C \subset B \subset A}} (-1)^{|A\backslash B|}$.

   (a) Si $C = A$ : montrer que $\Delta(A, C) = 1$.

   (b) Si $C \neq A$ : on pose $n = |A\backslash C|$. En remarquant que choisir une partie $B$ telle que $C \subset B \subset A$ revient à faire l'union de $C$ avec une partie choisie dans $A\backslash C$, établir que :

$$\Delta(A, C) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \qquad \text{puis que : } \Delta(A, C) = 0$$

2. Conclure, à l'aide d'une permutation de signe $\Sigma$ , que $\varphi$ et $\psi$ vérifie la relation $(**)$.
   (*Formellement :* $\sum\limits_{B \text{ tq } B \subset A} \ \sum\limits_{C \text{ tq } C \subset B} = \sum\limits_{C \text{ tq } C \subset A} \ \sum\limits_{B \text{ tq } C \subset B \subset A}$ )

**Partie III : Applications**

1. Soient $F$ un ensemble fini de cardinal $n$ et $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application. Montrer que :

$$\sum_{A \in \mathcal{P}(F)} h(|A|) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h(k).$$

2. Soient $E$ et $F$ deux ensembles finis tels que $n = |E| \geq |F| = p$. Montrer que le nombre de surjections de $E$ sur $F$ est le nombre $S_n^p$ défini par : $S_n^p = \sum\limits_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (-1)^{p-k} k^n$.

3. Soit $E$ un ensemble fini tel que $n = |E|$. On appelle dérangement de $E$ toute permutation qui n'a aucun point fixe. Montrer que le nombre de dérangements de $E$ est : $d_n = n! \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.