Dénombrements classiques et applications

Partie I : Nombre de surjections

Quelques rappels :

- On note F^E l'ensemble des applications d'un ensemble E dans un ensemble F.
- On dit qu'une application $f : E \longrightarrow F$ est surjective de E sur F lorsque :

$$\forall y \in F, \exists x \in E / y = f(x),$$

  autrement dit lorsque $F = f(E) = \{f(x) \in F / x \in E\}$.
  En particulier f est toujours surjective de E sur $f(E)$.
- Soient E et F deux ensembles finis. S'il existe une surjection de E sur F alors on a : $\operatorname{Card} E \geq \operatorname{Card} F$. S'il existe une injection sur E à valeurs dans F alors : $\operatorname{Card} E \leq \operatorname{Card} F$.
- Soient E et F deux ensembles finis et $f : E \longrightarrow F$ une application. Si $\operatorname{Card} E = \operatorname{Card} F$ alors on a :

$$f \text{ injective sur } E \iff f \text{ surjective de } E \text{ sur } F \iff f \text{ bijective de } E \text{ sur } F$$

Définition :

Soit $(n,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. On note S_n^p le **nombre de surjections** d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments. On pose $S_n^0 = S_0^p = 0$.

1. **Exemples simples.** Soit $(p,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.
   (a) Pour $n > p \geq 1$, déterminer S_n^p.
   (b) Pour $p \in \mathbb{N}^*$, déterminer S_p^p et S_1^p.
   (c) Etablir que : $\forall p \geq 2,\ S_2^p = 2^p - 2$.
   (d) Soient E et F deux ensembles finis tels que $\operatorname{Card} E = n+1$ et $\operatorname{Card} F = n$. Soit $f : E \longrightarrow F$ une surjection de E sur F.
   Montrer qu'il existe un unique $y \in F$ admettant deux antécédents par f (*remarquer que f n'est pas injective sur E ...*) En déduire que :

$$S_n^{n+1} = \frac{n}{2}(n+1)!$$

2. **Formule générale.** Soit $(p,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que $1 \leq n \leq p$.
   (a) Soit $q \in [\![0, n-1]\!]$. Etablir que : $\forall k \in [\![q, n]\!]$, $\binom{n}{k}\binom{k}{q} = \binom{q}{n}\binom{k-q}{n-q}$. En déduire que :

$$\sum_{k=q}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}\binom{k}{q} = 0.$$

(b) Soit $i \in [\![1, n]\!]$. On pose : $\mathcal{A}_i = \left\{ f \in F^E / \operatorname{Card} f(E) = i \right\}$. Justifier que : $F^E = \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{A}_i$. En déduire que :

$$n^p = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} S_i^p.$$

(c) Déduire de (a), (b) et (c) que :

$$S_n^p = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} k^p.$$

(*Commencer par calculer le membre de droite en utilisant* (b) *et utiliser que* $\sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} x_{ik} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=i}^{n} x_{ik}$ $\ldots$)

3. **Table des S_n^p.**

(a) Etablir que, si $n \geq 2$ et $p \geq n$:

$$S_n^p = n\left(S_n^{p-1} + S_{n-1}^{p-1}\right).$$

(*On suggère d'utiliser la question* 2.(c) $\ldots$)

(b) A l'aide du principe de récurrence, démontrer que :

$$\forall p \geq 1, \quad S_p^{p+2} = \frac{p(3p+1)}{24}(p+2)!.$$

(c) En s'inspirant du triangle de Pascal, construire la table des S_n^p pour $1 \leq n \leq 5$ et $1 \leq p \leq 5$.

4. **Applications.**

(a) On distribue 5 huitres (en les distinguant) à Pierre, Paul et Jacques. On suppose que toutes les répartitions sont équiprobables. Déterminer la probabilité qu'ils en recoivent au moins une chacun.

(b) Le jour du bizuthage les élèves de spé distribuent aux 47 jeunes bizuths p poireaux ($p \geq 47$) achetés au marché le matin même. Ils éliminent alors les bizuths qui n'en ont pas reçus. Ils reprennent les poireaux puis les redistribuent de façon aléatoire aux bizuths non éliminés ; ils eliminent de nouveau ceux qui n'en reçoivent pas. Ils réitèrent un certain nombre de fois ce jeu.

i. Quelle est la probabilité qu'au moins un bizuth (au moins) se retrouve sans poireaux ? qu'un bizuth reçoive tous les poireaux ?

ii. Pour $n \geq 1$, on note : $U_n =$ “ il reste 47 bizuths au bout de n éliminations ”, et $u_n = \mathbb{P}\left(U_n\right)$. Donner une relation de récurrence entre u_{n+1} et u_n. En déduire la valeur de u_n en fonction de n, puis $\lim_{n \to +\infty} u_n$. Comment interpréter ce résultat ?

Partie II : Nombres de Stirling (de 2^{nde} espèce)

Définition :

Si E est un ensemble fini, on appellera **partition** de E toute ensemble $\mathcal{A}$ de parties de E de la forme :

$$\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_p\} \text{ où } p \in \mathbb{N}^*,$$

où les A_i sont des parties de E non vides, deux à deux disjointes, d'union égale à E. On dit que **$\mathcal{A}$ est une partition de E en p classes**. Par exemple, pour $E = [\![0, 9]\!]$, l'ensemble

$$\mathcal{A} = \{ \{0\}, \{1, 3, 4, 5\}, \{2, 9\}, \{6\}, \{7, 8\} \}$$

est une partition de E (c'est une partition en 5 classes).
Si n est le cardinal de E, on notera, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\left\{ {n \atop p} \right\}$ le **nombre de partitions de E en p classes** (ce sont les nombres de Striling de deuxième espèce).
On adopte les conventions :

$$\left\{ {0 \atop 0} \right\} = 1 \quad \text{et} \quad \left\{ {n \atop 0} \right\} = 0 \quad \text{si } n \geq 1.$$

1. (a) Soit $(n, k) \in \mathbb{N}^*$. Etablir que, si $n < k$, alors $\left\{ {n \atop k} \right\} = 0$.
   (b) Calculer $\left\{ {n \atop 1} \right\}$ et $\left\{ {n \atop n} \right\}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (c) Etablir que $\left\{ {n \atop 2} \right\} = 2^{n-1} - 1$ pour $n \geq 1$.
2. (a) Démontrer que, pour $(n, k) \in \mathbb{N}^2$, tel que $1 \leq k \leq n$, on a :

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = k \left\{ {n-1 \atop k} \right\} + \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\},$$

   (*fixer un élément $x \in E$ et distinguer, parmi les partitions $\mathcal{A}$ de E en k classes, celles dont la classe A_x contenant x est $\{x\}$, et celles dont la classe $\mathcal{A}_x$ contenant x n'est pas un singleton.*)
   (b) En déduire, par un procédé analogue à celui du triangle de Pascal, la contruction d'une table donnant les coefficients $\left\{ {n \atop k} \right\}$ pour $0 \leq k \leq 6$ et $0 \leq n \leq 6$.
3. Démontrer la formule :

$$\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2, \quad \left\{ {n+1 \atop p+1} \right\} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left\{ {k \atop p} \right\}.$$

   (*fixer $x \in E$ et s'intéresser à* Card A_x *où A_x est la classe contenant x* ...)
4. Etablir que :

$$\forall (n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*, \quad S_p^n = \left\{ {n \atop p} \right\} p!,$$

   où S_p^n désigne le nombre de surjections d'un ensemble à n éléments dans un ensemble à p éléments.
5. Si $z \in \mathbb{C}$ on pose $[z]_0 = 1$ et, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $[z]_k = z(z-1)(z-2) \ldots (z-k+1)$.
   Démontrer la formule :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{C}, \quad z^n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} [z]_k.$$

6. **Applications.**

   Un mouton blessé (et malchanceux) tombe dans une eau peuplée de 24 requins affamés. Les prédateurs se jettent sur lui, le découpent sauvagement en 126 morceaux, puis en mangent chacun au moins un.

   (a) Combien y a-t-il de festins possibles (sans distinguer les requins) ?

   (b) On suppose tous ces festins équiprobables. Déterminer la probabilité qu'un des requins mange à lui seul 103 morceaux de mouton.

Partie III : Nombres de Bell

Définition :

On reprend les notations de la partie II. On note désormais B_n le nombre de partitions de E (cette fois-ci en un nombre quelconque de classes). On pose aussi : $B_0 = 1$.

1. Etablir que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad B_n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\}.$$

2. (a) Démontrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k.$$
   (*On pourra s'inspirer de la démonstration de* $II.2.(a)$ ...)

   (b) En déduire le calcul de B_n, pour $0 \leq n \leq 5$.

3. Démontrer que :
$$\forall n \geq 5, \quad B_n \geq 2^n \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad B_n \leq n^n.$$

4. **Application.**

   Arthur (2 ans et demi) a construit un château fort avec 258 briques de Lego$^{\text{TM}}$. Son petit frère Thibaut (11 mois) se fait un plaisir de se jeter sur cette construction. On appelle répartion l'ensemble formé des différentes pièces (une pièce est constituée d'une ou plusieurs briques), dispersées au hasard de la destruction du château.

   (a) Combien a-ton de répartitions possibles ?

   (b) En supposant ces répartitions équiprobables, quelle est la probabilité que Thibaut détruise le château en 255 pièces ?