Suites et dérivabilité : Équation fonctionnelle

Le but de ce problème est de déterminer toutes les fonctions u définies sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\text{(i) } u \text{ est continue sur } \mathbb{R}$$
$$\text{(ii) } \forall x \in \mathbb{R}, \quad u(2x) = \frac{2u(x)}{1+u(x)^2}$$

On note $\mathscr{C}$ l'ensemble des fonctions vérifiant ces deux conditions.

<u>Partie I</u> : Étude d'une fonction particulière de $\mathscr{C}$

On note h la fonction

$$h: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \end{array}$$

1. Étudier la continuité de h. Déterminer les limites de h en $-\infty$ et $+\infty$.
2. Établir que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -1 \leq h(x) \leq 1$$
3. Déterminer un équivalent simple de h au voisinage de 0.
4. Montrer que la fonction h est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$ et que :
$$\forall y \in]-1,1[, \quad h^{-1}(y) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$$
5. Vérifier que la fonction h appartient à $\mathscr{C}$.

<u>Partie II</u> : Valeur des fonctions de $\mathscr{C}$ en zéro

Soit u une fonction de $\mathscr{C}$.

1. Établir que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -1 \leq u(x) \leq 1$$
2. Vérifier que : $u(0) = 1$ ou $u(0) = -1$ ou $u(0) = 0$.

   On suppose maintenant que u est une fonction de $\mathscr{C}$ non constante et telle que $u(0) = 1$.
3. Justifier qu'il existe un réel x_0 tel que $u(x_0) \neq 1$.
4. On considère les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n = \frac{x_0}{2^n} \quad \text{et} \quad y_n = u(x_n)$$
   Justifier que ces deux suites sont convergentes et préciser leur limite.
5. Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer y_n en fonction de y_{n+1}. En déduire que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ garde un signe constant.
6. Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer le signe de $y_{n+1} - y_n$. En déduire que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.

7. Mettre en évidence une contradiction, en discutant suivant le signe de $u(x_0)$.

   Dans la question suivante, u est une fonction de $\mathscr{C}$ non constante.

8. A l'aide des questions précédentes, donner la valeur de $u(0)$.

<u>Partie III</u> : Détermination des fonctions de $\mathscr{C}$

Soit u une fonction de $\mathscr{C}$ non constante. En utilisant des raisonnements similaires à la partie II on peut montrer que : pour tout $x \in]-1,1[$, $u(x) \in]-1,1[$, et en particulier que : $u(0) = 0$. ***On admettra ces deux résultats.***

On considère la fonction $g = h^{-1} \circ u$. g est donc définie sur $\mathbb{R}$.

1. Établir que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(2x) = 2g(x)$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad g\left(\frac{x}{2^n}\right) = \frac{1}{2^n} g(x)$$

3. On suppose dans cette question que u est dérivable en 0.
   (a) Justifier que g est dérivable en 0, et déterminer $g'(0)$.
   (b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer de deux manières distinctes : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{g\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\frac{x}{2^n}}$.
   (c) Montrer qu'il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = cx$$

4. En déduire toutes les fonctions de l'ensemble $\mathscr{C}$ qui sont dérivables en 0.