Dérivabilité et TAF : Étude d'une fonction et approximation d'un point fixe

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{x}{1+e^x}.$$

1. **Etude des variations de f.**
   (a) Etudier la dérivabilité de f. Déterminer la fonction f'.
   (b) Montrer qu'il existe un unique réel a tel que $f'(a) = 0$.
   (c) Etablir que $a \in [0, 1[$ et que $f(a) = a - 1$.
   (d) En déduire les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2. **Etude des branches infnies de f.**
   (a) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
   (b) Montrer que la courbe représentative de f admet des droite asymptotes aux voisinages de $+\infty$ et $-\infty$. Déterminer leur équation et leur position relative sur $\mathbb{R}$ par rapport à la courbe de f.
3. **Etude locale en 0.**
   (a) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0.
   (b) A l'aide d'un développement limité, préciser la position relative de la courbe par rapport à la tangente.
4. **Signe de f''.**
   (a) Soit $g : x \longmapsto (x-2)e^x - x - 2$. Etablir que, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $g(x) \geq g(a)$ puis que $g(a) = \frac{a^2}{1-a}$.
   (b) En déduire que g s'annule exactement deux fois sur $\mathbb{R}$.
   (c) Déterminer le signe de f''. Donner une interprétation graphique.
5. **Approximation de a.**
   Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = 1 + e^{-x}$.
   (a) Prouver que a est l'unique solution de l'équation $h(x) = x$.
   (b) Etablir que $a > 1$ et en déduire que $a - 1 < \frac{1}{e}$.
   (c) Montrer que, pour tout $x \geq 1$:
   $$h(x) \geq 1 \qquad \text{et} \qquad |h(x) - a| \leq \frac{1}{e}|x - a|.$$
   (*On pourra utiliser le théorème des accroissements finis...*)
   (d) On considère la suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $a_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_{n+1} = h(a_n)$.
      i. Etablir que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \geq 1$.
      ii. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|a_n - a| \leq e^{-(n+1)}$.
   (e) En déduire que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et déterminer une valeur approchée de a à 10^{-2} près.
6. **Représentation graphique de f**
   En utilisant tous les résultats précédents, tracer l'allure de la courbe représentative de f.