# Développement limité d'une fonction réciproque

Les parties A et B sont largement indépendantes. Seule la question B.3.c. utilise les résultats de la partie A.

***Rappel*** : on note $o(x^n)$ toute expression qui peut s'écrire sous la forme : $x^n \times \epsilon(x)$, où $\epsilon$ est une fonction qui tend vers 0.

**Partie A**. *Développement limité d'une fonction réciproque.*

Dans cette partie, $n$ est un entier strictement supérieur à 1, $f$ est une application bijective de $I$ sur $J$, où $I$ et $J$ sont des intervalles contenant un intervalle ouvert centré en 0, qui vérifie $f(0) = 0$. De plus, $f$ admet en 0 un développement limité à l'ordre $n$, de la forme :

$$f(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + x^n \times \epsilon(x)$$

où $a_1$ est un réel non nul et $\epsilon$ est une fonction qui tend vers 0 lorsque $x$ tend vers 0.

1. On pose : $\left\{ \begin{array}{rcl} P(x) & = & a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \\ Q(x) & = & b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n \end{array} \right.$ où les $b_1, \ldots, b_n$ sont des réels quelconques.
   (a) Calculer les coefficients des termes de degré 1 et 2 du polynôme $Q \circ P(x)$.
   (b) On appelle $c_i$ $(2 \leq i \leq n)$ le coefficient du terme de degré $i$ de $Q \circ P(x)$. Vérifier qu'il est de la forme :
   $$c_i = \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{i,j} b_j + b_i a_1^i$$
   où les $\alpha_{i,j}$ sont des réels dépendant des coefficients de $P$ et qu'on ne cherchera pas à déterminer.
2. (a) Montrer que l'on a pour tout $i$ vérifiant $1 \leq i \leq n$ :
   $$\left[f(x)\right]^i = \left(a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n\right)^i + x^n \times \epsilon_i(x)$$
   où $\epsilon_i$ est une fonction qui tend vers 0 lorsque $x$ tend vers 0.
   (b) En déduire : $Q\big(f(x)\big) = Q\big(P(x)\big) + o(x^n)$.
   Puis : $Q\big(f(x)\big) = \sum_{i=1}^{n} c_i x^i + o(x^n)$.
3. Pour $x$ élément de $I$, on pose $y = f(x)$.
   (a) Montrer que $y^n$ est équivalent à $a_1^n x^n$ au voisinage de 0.
   (b) Montrer que $f^{-1}(y) - Q(y)$ est de la forme $o(x^n)$ si les $b_1, \ldots, b_n$ sont solutions d'un système linéaire linéaire trianguliare dont les coefficients des termes de la diagonale sont non nuls.
   (c) Conclure que $f^{-1}$ admet un développement limité à l'ordre $n$ et donner une méthode de calcul de sa partie régulière.

**Partie B.**

Dans toute cette partie on note $f$ l'application définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\exp(x^2)-1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que $f$ est impaire et de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $f'$ garde un signe constant sur $\mathbb{R}$. On pourra pour cela étudier la fonction $u$ qui, à tout $t$ réel positif, associe :

   $$u(t) = (2t-1)\exp(t) + 1$$

   En déduire l'existence d'une application réciproque de $f$, impaire.
3. (a) Justifier l'existence d'un développement limité de $f$ en 0 à tout ordre $n$.

   (b) Ecrire un développement limité de $f$ en 0 à l'ordre 5.

   (c) En utilisant la partie A, donner un développement limité à l'ordre 5 de $f^{-1}$ en 0.