DL et étude d'une solution d'une équation différentielle

Partie A.

On considère l'équation différentielle : $y' + 2xy = 1$.

1. De quel type d'équation différentielle s'agit-il ?
   On désigne désormais par f l'une de ses solutions sur $\mathbb{R}$, que l'on ne cherchera pas à exprimer pour l'instant.
2. (a) Prouver que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
   (b) Quelle est la valeur de $f'(0)$?
3. Montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n+2)}(x) = -2xf^{(n+1)}(x) - 2(n+1)f^{(n)}(x).$$
4. (a) Montrer que f admet en 0 un développement limité à tout ordre p (p entier naturel).
   Écrivons un tel développement limité au moyen d'une suite de réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$:
   $$f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{n=0}^{p} a_n x^n + o\left(x^p\right).$$
   Exprimer a_n en fonction de $f^{(n)}(0)$.
   (b) A l'aide du résultat de la question 3., montrer que :
   $$\forall k \in \mathbb{N}, \quad a_{2k+1} = \frac{(-4)^k k!}{(2k+1)!}.$$
   (c) Obtenir également l'expression des termes a_{2k}, à l'aide de $f(0)$ (k entier naturel).

Partie B.

On considère la fonction de la variable réelle

$$D : x \longmapsto D(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2}\, dt.$$

1. Justifier le fait que D est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et vérifier que D est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $y' + 2xy = 1$.
2. Étudier la parité de D.
3. Prouver que :
   $$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad xe^{-x^2} \leq D(x) \leq x.$$
4. (a) En utilisant des intégrations par parties, prouver que :
   $$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \int_1^x e^{t^2}\, dt = \frac{e^{x^2}}{2x} + \frac{e^{x^2}}{4x^3} - \frac{3e}{4} + \frac{3}{4}\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^4}\, dt.$$

(b) Soit la fonction $h : t \longmapsto \frac{e^{t^2}}{t^2}$. Montrer que h est croissante sur $[1, +\infty[$. En déduire que :

$$\forall x \in [1, +\infty[, \quad \int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^4}\,dt \leq h(x) \int_1^x \frac{1}{t^2}\,dt$$

et qu'au voisinage de $+\infty$:

$$\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^4}\,dt \underset{x \to +\infty}{=} o\left(\frac{e^{x^2}}{2x}\right).$$

(c) En déduire qu'au voisinage de $+\infty$:

$$\int_1^x e^{t^2}\,dt \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{e^{x^2}}{2x}.$$

En déduire enfin un équivalent de $D(x)$ au voisinage de $+\infty$.

5. (a) Prouver que D admet un maximum, atteint en un point.
   (b) Montrer que ce maximum est égal à $\frac{1}{2b}$.
   (c) En déduire l'unicité du point où le maximum est atteint.

Partie C.

1. Déterminer à l'aide de D l'ensemble des fonctions solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $y' + 2xy = 1$.
2. Montrer l'existence d'une unique solution impaire.