Développement limité de solutions d'une equation différentielle

1. Résoudre sur $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ l'équation différentielle :
$$\cos(t)z''(t) - 2\sin(t)z'(t) - \cos(t)z(t) = 0.$$
On pourra utiliser le changement de fonction inconnue : $\phi(t) = \cos(t)z(t)$.
2. Résoudre sur $J =]-1, 1[$ l'équation différentielle :
$$(1 - x^2)y''(x) - 3xy'(x) - y(x) = 0.$$
On pourra utiliser le changement de variable : $x = \sin(t)$ en posant $\phi(t) = y(x) = y(\sin t)$.
3. Soit f une solution sur J de $(1 - x^2)y''(x) - 3xy'(x) - y(x) = 0$. D'après la question 2., il existe donc $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que :
$$\forall x \in J, \quad f(x) = \frac{\lambda \arcsin(x) + \mu}{\sqrt{1 - x^2}}.$$
   (a) Justifier que f est C^∞ sur J et qu'elle admet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, un $DL_n(0)$ de la forme : $f(x) \underset{x \to 0}{=} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + o\big(x^n\big)$.
   (b) Etablir que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$\forall x \in J, \quad (1 - x^2)f^{(n+2)}(x) - (2n + 3)xf^{(n+1)}(x) - (n + 1)^2 f^{(n)}(x) = 0.$$
   (c) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_n = f^{(n)}(0)$. Donner une relation de récurrence entre a_{n+2} et a_n, valable pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (d) Etablir les formules suivantes, pour tout $p \in \mathbb{N}$:
$$a_{2p+1} = 2^{2p}(p!)^2 a_1 \quad \text{et} \quad a_{2p} = \frac{\big((2p)!\big)^2}{2^{2p}(p!)^2} a_0$$
4. En utilisant les résultats de la question précédente, déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
   (a) le $DL_{2n+1}(0)$ de $x \longmapsto \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$,
   (b) le $DL_{2n}(0)$ de $x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ puis le $DL_{2n+1}(0)$ de $x \longmapsto \arcsin(x)$.
5. En déterminant de deux façons différentes le coefficient d'ordre $2n + 1$ dans le DL en 0 de $x \longmapsto \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$, obtenir la formule :
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k + 1}\binom{2k}{k}\binom{2n - 2k}{n - k} = \frac{1}{n + 1}\frac{16^n}{\binom{2n+1}{n}}.$$