Équations fonctionnelles

Partie I

On souhaite déterminer l'ensemble des applications $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$$\begin{array}{ll} (i) & f \text{ dérivable en } 0 \\ (ii) & \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(2x) = 2f(x). \end{array}$$

1. On se donne $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant (i) et (ii).
   (a) Montrer que :
   $$f(t) \underset{t \to 0}{=} t.f'(0) + o(t).$$
   (b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une suite de réels $(\epsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$, convergente vers 0, et telle que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f\left(\frac{x}{2^n}\right) = \frac{x}{2^n} f'(0) + \frac{1}{2^n} \epsilon_n.$$
   En déduire que : $f(x) = x.f'(0)$.
2. Etablir que les solutions du problème sont les fonctions de le forme $f = \lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Partie II

On souhaite déterminer l'ensemble des applications $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$$\begin{array}{ll} (i) & f \text{ dérivable en } 0 \\ (ii) & \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(2x) = \left[f(x)\right]^2. \end{array}$$

1. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant (i) et (ii).
   (a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \ f(x) \geq 0$.
   (b) Etablir que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f\left(\frac{x}{2^n}\right) = \left[f(x)\right]^{\frac{1}{2^n}}.$$
2. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant (i) et (ii). On suppose que f s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$. On note b un de ces points.
   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $f\left(\frac{b}{2^n}\right) = 0$.
   (b) En déduire la valeur de $f(0)$.
   (c) Soit $x \in \mathbb{R}$. On suppose que $f(x) \neq 0$. Montrer qu'alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \left[f(x)\right]^{\frac{1}{2^n}} = 1$. En déduire une contradiction.
   (d) Conclure.
3. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant (i) et (ii). On suppose que f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
   (a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) > 0$.
   (b) A l'aide de la partie I, déterminer la fonction $g : x \longmapsto \ln f(x)$.
4. Conclure.