Endomorphismes de $\mathbb{C}^4$

On note $\mathcal{B}$ la base canonique du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^4$ et Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{C}^4$. On note $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$, respectivement $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices carrées d'ordre 4 à coefficients dans $\mathbb{C}$, respectivement dans $\mathbb{R}$.

On note I la matrice $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et J la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On note g l'endomorphisme de $\mathbb{C}^4$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ vaut J.

Pour tout quadruplet $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^4$, on note M_A la matrice $M_A = \sum_{k=1}^4 a_k J^{k-1}$ et f_A l'endomorphisme de $\mathbb{C}^4$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ vaut M_A.

On utilisera, sans chercher à le jusitifer, le fait que $\forall M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C}), \quad M^0 = I$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 = 1$.
2. On note Sp(g) l'ensemble des valeurs propres de g.
   (a) Montrer que $\mathrm{Sp(g)} = \{1, \mathrm{i}, -1, -\mathrm{i}\}$.
   (b) Déterminer une base de chaque sous-espace propre associé, formée de vecteurs dont la première coordonnée vaut 1.
   (c) Montrer que l'union de ces 4 bases forme une base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{C}^4$. Donner la matrice de g dans cette base. Que remarquez-vous ?
3. On considère un quadruplet $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^4$.
   (a) Calculer les coefficients de M_A.
   (b) Montrer que f_A est combinaison linéaire de Id, g, $g \circ g$ et $g \circ g \circ g$.
   (c) Calculer l'image par f_A des vecteurs propres de g déterminés au 2.(b).
   (d) En déduire une base dans laquelle la matrice de f_A est diagonale, et donner la matrice de f_A dans cette base.
4. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on note $M(z)$ la matrice $M(z) = \begin{pmatrix} z & 1 & 1 & 1 \\ 1 & z & 1 & 1 \\ 1 & 1 & z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & z \end{pmatrix}$.
   (a) Déterminer les valeurs propres de l'endomorphisme canoniquement associé à $M(z)$.
   (b) Déterminer l'ensemble des nombres complexes z pour lesquels $M(z)$ est inversible.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C}$.
Calculer $\left[M(1)\right]^k$ et $\big(M(z) - M(1)\big)^k$ puis, en remarquant que $M(z) = \big(M(z) - M(1)\big) + M(1)$, en déduire une expression de $M(z)^n$ à l'aide de z, n, $M(1)$ et I.

5. Application.
   (a) Ecrire un algorithme fournissant le produit de deux matrices appartenant à $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$. Combien d'opérations (additions et multiplications) sont-elles réalisées ?
   (b) Ecrire un algorithme fournissant la puissance n-ème d'une matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ utilisant l'algorithme précédent. Combien d'opérations (additions et multiplications) sont-elles réalisées ?
   (c) Soit z un réel écrire un algorithme fournissant la puissance n-ème de $M(z)$ en utilisant la formule obtenue au 4.(c). Combien d'opérations (additions et multiplications) sont-elles réalisées ?