Équivalent d'une suite récurrente grâce à un changement de suite

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{u_n^2+u_n}{2}$.

Préliminaire :

1. Montrez que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors sa limite est égale à 0 ou à 1.
2. Représentez graphiquement les premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans le cas où $u_0 > 1$. (on fera un dessin soigné)
3. Quelles conjectures pouvez-vous faire ?

Dans toute la suite du problème, on se place dans le cas où $u_0 > 1$. Les objectifs du problème sont les suivants :
- d'une part, montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente et que $\lim u_n = +\infty$ (Partie I) ;
- d'autre part, étudier la *vitesse de divergence* de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en comparant cette suite avec une autre suite divergente (Partie II).

Partie I :

1. Montrez que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 1$.
2. En déduire que la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Etudier le comportement asymptotique de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Partie II :

On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \frac{1}{2^n}\ln\left(\frac{u_n}{2}\right)$.

1. Etude de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (a) En étudiant le signe de $v_{n+1} - v_n$, montrez que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   (b) Montrez que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leqslant (u_n)^2$.
   (c) Montrez que : $\forall n \in \mathbb{N}\ v_{n+1} \leqslant v_n + \frac{1}{2^{n+1}}\ln(2)$.
   (d) En déduire que : $\forall n \geqslant 1,\ v_n \leqslant v_0 + \ln(2) \times \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$.
   (e) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
2. Vitesse de convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On note $\alpha = \lim v_n$.
   (a) Montrez que : $\forall x > 0,\ \ln(1+x) \leqslant x$.
   (b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant v_{n+1} - v_n \leqslant \frac{1}{2^{n+1}u_n}$.
   (c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que : $\forall p \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant v_{n+p} - v_n \leqslant \frac{1}{u_n}\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{2^{n+k}}$.
   (d) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \alpha - v_n \leqslant \frac{1}{2^n u_n}$.
   (e) Exprimez u_n en fonction de v_n.
   (f) Montrer que :
$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2e^{\alpha 2^n}.$$