Formule de changement de base pour une famille de vecteurs

Objectif : Si $\mathcal{F}$ est une famille de vecteurs de $\mathbb{K}^n$ et si $\mathcal{B}_0$ et $\mathcal{B}_1$ sont deux bases de $\mathbb{K}^n$, on souhaite trouver une relation simple entre $Mat_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{F})$ et $Mat_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{F})$.

PARTIE I : Etude d'un exemple dans $\mathbb{C}^2$

On munit l'espace vectoriel $\mathbb{C}^2$ d'une base $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2)$. Soit (ϵ_1, ϵ_2) une famille de vecteurs de $\mathbb{C}^2$. On note $P = Mat_{\mathcal{B}_0}(\epsilon_1, \epsilon_2) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

1. Montrer que : (ϵ_1, ϵ_2) est une base de $\mathbb{C}^2 \iff P \in Gl_2(\mathbb{C})$.
2. On suppose dans cette question que la matrice P est inversible et on note $\mathcal{B}_1 = (\epsilon_1, \epsilon_2)$. Soit $u \in \mathbb{C}^2$. On pose $X = Mat_{\mathcal{B}_0}(u)$ et$X' = Mat_{\mathcal{B}_1}(u)$. Montrer que
$$X = PX'.$$

PARTIE II : Cas général

On munit l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$ d'une base $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$.

1. Soit $(\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{K}^n$. On pose $P = Mat_{\mathcal{B}_0}(\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n)$. Montrer que : $(\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n)$ est une base de $\mathbb{K}^n \iff P \in Gl_n(\mathbb{K})$.
2. Soit $\mathcal{B}_1$ une base de $\mathbb{K}^n$. On pose encore $P = Mat_{\mathcal{B}_0}(\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n) = Mat_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}_1)$.
   (a) Soit $u \in \mathbb{K}^n$. On pose $X = Mat_{\mathcal{B}_0}(u)$ et $X' = Mat_{\mathcal{B}_1}(u)$. Montrer que :
   $$X = PX'$$
   .
   (b) Soit $\mathcal{F} = (u_1, u_2, \ldots, u_k)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{K}^n$. On pose $A = Mat_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{F})$ et $A' = Mat_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{F})$. Montrer que :
   $$A = PA'$$
   .
   (c) En remarquant que $Mat_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}_0) = I_n$, en déduire que :
   $$P^{-1} = Mat_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{B}_0).$$

*Commentaire : La matrice $P = Mat_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}_1)$ est appelée **matrice de passage** de la base $\mathcal{B}_0$ à la base $\mathcal{B}_1$. On la note $P_{\mathcal{B}_0 \longrightarrow \mathcal{B}_1}$. On a montré en (c) que :*

$$\left(P_{\mathcal{B}_0 \longrightarrow \mathcal{B}_1}\right)^{-1} = P_{\mathcal{B}_1 \longrightarrow \mathcal{B}_0}.$$

*En (b) on a établi la **formule de changement de base** (cf BCPST 2ème année) :*

$$Mat_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{F}) = P_{\mathcal{B}_0 \longrightarrow \mathcal{B}_1} \times Mat_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{F}) = Mat_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}_1) \times Mat_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{F}).$$

Cette formule donne une application pratique du produit matriciel !

<u>PARTIE III</u> : Application dans $\mathbb{R}^3$

On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ de sa base canonique $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$. On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$:

$$\epsilon_1 = (1,0,1), \quad \epsilon_2 = (1,1,0), \quad \epsilon_3 = (0,1,1).$$

1. Montrer que $\mathcal{B}_1 = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et donner les matrices $P_{\mathcal{B}_0 \longrightarrow \mathcal{B}_1}$ et $P_{\mathcal{B}_1 \longrightarrow \mathcal{B}_0}$
2. Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Donner les coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}_1 = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ en fonction de x, y et z.

   Application numérique pour : $x = 2$, $y = 5$ et $z = 3$.