Famille de vecteurs à paramètre

Soit $\mathbb{R}^4$ muni de sa base canonique $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_4})$ et soit $\mathcal{S}_a = \left(\overrightarrow{v_1}(a), \overrightarrow{v_2}(a), \overrightarrow{v_3}(a), \overrightarrow{v_4}(a)\right)$ une famille de 4 vecteurs de $\mathbb{R}^4$ dépendant du paramètre réel a, avec :

$$\overrightarrow{v_1}(a) = (a, 1, 7, -a) \qquad \overrightarrow{v_2}(a) = (2a, -1, -7, a) \qquad \overrightarrow{v_3}(a) = (0, 1, 5, -1) \qquad \overrightarrow{v_4}(a) = (3a, -1, -5, 1)$$

1. Déterminer, suivant la valeur du paramètre a, le rang de $\mathcal{S}_a$.
2. Donner, en fonction de a, une base $\mathcal{B}_a$ de $\mathbb{V}_a = \text{Vect}\left(\overrightarrow{v_1}(a), \overrightarrow{v_2}(a), \overrightarrow{v_3}(a), \overrightarrow{v_4}(a)\right)$.
3. Pour $a \neq 0$, montrer que $\left(\overrightarrow{v_1}(a), \overrightarrow{v_2}(a), \overrightarrow{v_3}(a), \overrightarrow{e_4}\right)$ est une famille libre.
4. Montrer que $\left(\overrightarrow{v_1}(0), \overrightarrow{v_3}(0), \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\right)$ est une famille libre.
5. Á l'aide des questions précédentes, compléter $\mathcal{B}_a$ avec des vecteurs de la base canonique afin d'abtenir une base de $\mathbb{R}^4$.
6. Déterminer, en fonction de a, un système d'équations cartésiennes de $\mathbb{V}_a$.