Homographies conservant le cercle unité

Notations

On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels et $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.
On note $i\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C};\ \mathcal{R}e(z) = 0\} = \{ib;\ b \in \mathbb{R}\}$ l'ensemble des nombres complexes imaginaires purs. On introduit aussi les sous-ensembles de $\mathbb{C}$ suivant :

$$U = \{z \in \mathbb{C};\ |z| = 1\} = \left\{e^{i\theta};\ \theta \in \mathbb{R}\right\}, \qquad P = \{z \in \mathbb{C};\ \mathcal{R}e(z) > 0\} \qquad \text{et} \qquad D = \{z \in \mathbb{C};\ |z| < 1\}.$$

Définition

Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4$ tel que $\boxed{ad - bc \neq 0}$.
On appelle *homographie définie par la relation* $h(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ l'application h à valeurs dans $\mathbb{C}$ qui à tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $cz + d \neq 0$ associe le nombre complexe $h(z) = \frac{az+b}{cz+d}$.

Partie I - Exemple

Soit h l'homographie définie par $h(z) = \frac{1+z}{1-z}$.

1. (a) Montrer que pour tout $z \in U$ tel que $z \neq 1$, on a $h(z) \in i\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que : $\forall z \in D,\ h(z) \in P$.
2. (a) Déterminer les nombres complexes z tels que $h(z) = z$.
   (b) Pour quel(s) $w \in \mathbb{C}$ l'équation $h(z) = w$ d'inconnue $z \neq 1$ possède-t-elle une solution ? Quelle(s) conclusion(s) peut-on en tirer sur la fonction h ?
3. Soit g l'homographie définie par $g(z) = \frac{z-1}{z+1}$.
   (a) Montrer que : $\forall z \in \mathbb{R},\ g(iz) \in U$.
   (b) Montrer que : $\forall z \in P,\ g(z) \in D$.

Partie II - Homographies conservant U

1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et h l'homographie définie par $h(z) = \frac{e^{i\theta}}{z}$. Montrer que : $\forall z \in U,\ h(z) \in U$.
2. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\alpha \notin U$. Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et h l'homographie définie par $h(z) = e^{i\theta}\frac{z+\alpha}{\overline{\alpha}z+1}$.
   (a) Montrer que h est bien une homographie et h est définie (au moins) sur U.
   (b) Montrer que : $\forall z \in U,\ h(z) \in U$.
3. Dans les trois questions suivantes nous allons établir trois résultats techniques utiles pour la suite.
   (a) Etablir que pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$, on a :
   $$|\alpha + \beta|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2 + 2\mathcal{R}e\left(\overline{\alpha}\beta\right).$$
   (b) Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$. Etablir que
   $$\Big(\forall \theta \in \mathbb{R},\ \ a + 2\mathcal{R}e\left(be^{-i\theta}\right) = 0\Big) \Longrightarrow \left(\ a = 0 \text{ et } b = 0\ \right).$$
   (c) Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tel que $|a| = |b|$. Montrer qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $a = be^{i\theta}$. Donner une interprétation géométrique de ce résultat.

4. Inversement, nous allons montrer que seules les homographies h précédentes (questions II.1 et II.2) sont telles que : $\forall z \in U,\ h(z) \in U$.

   Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4$ tel que $ad - bc \neq 0$ et h définie par $h(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ une homographie définie sur U telle que : $\forall z \in U,\ h(z) \in U$.

   (a) Etablir que : $\forall \theta \in \mathbb{R},\ |a|^2 + |b|^2 + 2\mathcal{R}e\left(\overline{a}be^{-i\theta}\right) = |c|^2 + |d|^2 + 2\mathcal{R}e\left(\overline{c}de^{-i\theta}\right)$.

   (b) En déduire les relations : $|a|^2 + |b|^2 = |c|^2 + |d|^2$ et $\overline{a}b = \overline{c}d$.

   (c) Si $a = 0$: montrer que l'homographie h est du type présenté en II.1.

   (d) Si $a \neq 0$: établir que $\left(|a|^2 - |c|^2\right)\left(|a|^2 - |d|^2\right) = 0$.

   (e) Observer que le cas $|a| = |c|$ est impossible à cause de la condition $ad - bc \neq 0$.

   (f) Observer que le cas $|a| = |d|$ conduit à une homographie h du type présenté en II.2.