Intégration : Fonction Béta d'Euler

Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a \geqslant 1$ et $b \geqslant 1$, on pose :

$$\beta(a,b) = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,dt.$$

1. (a) Montrer que cette intégrale est bien définie.
   (b) Soient $a \geqslant 1$ et $b \geqslant 1$. Comparer $\beta(a,b)$ et $\beta(b,a)$.
   (c) Soient $a \geqslant 1$ et $b \geqslant 1$. Etablir que $\beta(a,b) = \beta(a+1,b) + \beta(a,b+1)$.
   (d) A l'aide du changement de variable $t = \cos^2(\theta)$ montrer que $\beta(3/2,3/2) = \pi/8$.
   (e) Calculer $\beta(1,n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. (a) A l'aide d'une intégration par parties, établir que, pour tout $a \geqslant 1$ et $b \geqslant 1$, on a $\beta(a+1,b) = \frac{a}{a+b}\beta(a,b)$.
   (b) Calculer $\beta(n,p)$ pour tout $n,p \in \mathbb{N}^*$ en exprimant le résultat à l'aide de factoriels.
   (c) Montrer que pour tout $n,p \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\beta\left(n+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2p)!(2n)!}{2^{2(n+p)}(n+p)!n!p!}\pi.$$

3. Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a \geqslant 1$ et $b \geqslant 1$, on pose :

$$\gamma(a,b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2a-1}(\theta)\cos^{2b-1}(\theta)\,d\theta.$$

   (a) Montrer que cette intégrale est bien définie.
   (b) Pour tout $a \geqslant 1$ et $b \geqslant 1$ donner une relation entre $\gamma(a,b)$ et $\beta(a,b)$.