Intégration : Étude d'une fonction définie par une intégrale

On considère la fonction F définie par :

$$F(x) = \int_1^x \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,dt.$$

1. (a) Justifier que F est définie (au moins) sur $]0,+\infty[$.
   (b) Montrer que F est de classe C^∞ sur l'intervalle $]0,+\infty[$.
   (c) Donner le sens de variations de F sur l'intervalle $]0,+\infty[$.
2. On considère la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$\forall x > 0, \quad g(x) = \frac{\arctan(x)}{x}.$$

   (a) Montrer que g est prolongeable par continuité en 0.
   (b) Etablir que :

$$\forall x > 0, \quad F(x) = \arctan(x)\ln(x) - \int_1^x g(t)\,dt.$$

   (c) Montrer que l'on peut prolonger F par continuité en 0.
   (d) Etablir que F n'est pas dérivable à droite en 0.
3. Nous allons démontrer d'une autre manière que F est prolongeable par continuité en 0.
   (a) Etablir que :

$$\forall x > 0, \quad F(x) = F\left(\frac{1}{x}\right).$$

   (b) Etablir que, pour $t \geqslant 1$, on a $\ln(t) \leqslant \sqrt{t}$.
   (c) En déduire que :

$$\forall x \geqslant 1, \quad F(x) \leqslant 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right).$$

   (d) A l'aide du théorème de la limite monotone en déduire que l'on peut prolonger F par continuité en 0.
4. Nous allons maintenant calculer une valeur approchée de $F(0)$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x > 0$ on pose :

$$I_k(x) = \int_1^x t^k \ln(t)\,dt.$$

   (a) Montrer que cette intégrale est bien définie.
   (b) A l'aide d'une intégration par parties, établir que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x > 0, \quad I_k(x) = \frac{x^{k+1}\ln(x)}{k+1} - \frac{x^{k+1}}{(k+1)^2} + \frac{1}{(k+1)^2}.$$

   (c) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x > 0, \quad \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{1+x^2}.$$

   (d) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall 0 < x < 1, \quad \left|F(x) - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k I_{2k}(x)\right| \leqslant I_{2n+2}(x).$$

   (e) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose : $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |F(0) - u_n| \leqslant \frac{1}{(2n+3)^2}.$$

   (f) En déduire une méthode pour donner une valeur approchée de $F(0)$ à 10^{-2} près. Donner cette valeur approchée.