Une formule de calcul intégral

Dans ce problme, a est un réel strictement positif et f désigne une fonction de la variable réelle définie sur l'intervalle $[0, a]$, valeurs réelles, continue et strictement croissante sur $[0, a]$, dérivable dans l'intervalle $]0, a[$ et s'annulant en zéro. Le fonction f est alors bijective de $[0, a]$ dans $[0, f(a)]$ et admet une réciproque notée g.

La fonction g est caractrisée par

$$\forall x \in [0, a],\ \forall y \in [0, f(a)], \quad y = f(x) \Longleftrightarrow x = g(y).$$

On remarquera que g est continue sur l'intervalle $[0, f(a)]$ et strictement croissante sur cet intervalle.

1. Dans les deux premières questions on montre que pour tout réel α tel que $0 \leq \alpha \leq a$:

$$(1) \qquad \int_0^{\alpha} f(x)\, dx + \int_0^{f(\alpha)} g(y)\, dy = \alpha f(\alpha).$$

   (a) Justifier que l'on a $g(0) = 0$.

   (b) Exemple : on prend $f(x) = x^p$ avec p réel strictement positif ; vérifier la relation (1).

2. Pour tout réel α vérifiant $0 \leq \alpha \leq a$, on note $\varphi(\alpha)$ la quantité :

$$\varphi(\alpha) = \int_0^{\alpha} f(x)\, dx + \int_0^{f(\alpha)} g(y)\, dy - \alpha f(\alpha).$$

   (a) Exprimer la fonction φ l'aide de f et de primitives de f et g.

   (b) En déduire que la fonction φ ainsi définie est continue sur $[0, a]$.

   (c) Montrer que φ est dérivable sur $]0, a[$, de dérivée nulle sur $]0, a[$ et en déduire que φ est constante sur $[0, a]$.

   (d) Vérifier que $\varphi(0) = 0$ et en déduire l'égalité (1).

3. Dans cette question, on applique la formule précédente au calcul de $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\tan x}\, dx$.

   (a) Soit $P(x) = x^4 + 1$. Montrer que $P(x) = (x^2 + x\sqrt{2} + 1)(x^2 - x\sqrt{2} + 1)$.
   Pour la suite du problème on admettra l'identité :

$$\frac{x^2}{x^4 + 1} = \frac{\sqrt{2}}{4} \left(\frac{x}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} - \frac{x}{x^2 + x\sqrt{2} + 1} \right).$$

   (b) Montrer que

$$\int_0^1 \frac{x^2}{1 + x^4}\, dx = \frac{\sqrt{2}}{4} \int_{-1}^1 \frac{x}{x^2 - x\sqrt{2} + 1}\, dx.$$

   Indication : on utilisera un changement de variable.

   (c) En déduire que

$$\int_0^1 \frac{x^2}{1 + x^4}\, dx = \frac{\sqrt{2}}{8} \ln(3 - 2\sqrt{2}) + \frac{\sqrt{2}\pi}{8}.$$

   Indication : on pourra utiliser le changement de variable $u = x\sqrt{2} - 1$ ainsi que la formule valable pour tout rel x, strictement positif :

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

4. Dans cette question, f_0 désigne la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ par $f_0(x) = \sqrt{\tan x}$.
   (a) Montrer que f_0 est strictement croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, continue sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ et dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{4}\right[$. Justifier l'existence de la fonction f_0^{-1} et donner l'expression de cette fonction réciproque.
   (b) Calculer $\int_0^1 \arctan(y^2)\, dy$ par intégrations par parties.
   (c) En déduire, en utilisant (1), la valeur de $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\tan x}\, dx$.
5. Dans cette question, on revient au cas général.

   α désigne un réel vérifiant $0 \leq \alpha \leq a$, et β un réel vérifiant $0 \leq \beta \leq f(a)$.
   (a) Montrer, en distinguant deux cas selon la position relative de β et de $f(\alpha)$ que

   $$\int_{f(\alpha)}^{\beta} g(y)\, dy \geq \alpha(\beta - f(\alpha))$$

   puis que

   $$(2) \qquad \alpha\beta \leq \int_0^{\alpha} f(x)\, dx + \int_0^{\beta} g(y)\, dy.$$

   (b) Etudier dans l'intervalle $[0, f(a)]$ les variations de la fonction définie par

   $$\forall t \in [0, f(a)], \quad h(t) = \alpha t - \int_0^t g(y)\, dy.$$

   Calculer la valeur de son maximum et retrouver ainsi la formule (2).