Intégrales de Wallis

Soit $(W_n)_{n\geqslant 0}$ la suite des *intégrales de Wallis* définies par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ W_n = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^n \, dt.$$

1. A l'aide d'un changement de variable affine (i.e. du type t=au+b), montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ W_n = \int_0^{\pi/2} (\cos t)^n \, dt.$$
2. Montrer que la suite $(W_n)_{n\geqslant 0}$ est strictement positive.
3. Montrer que la suite $(W_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante. Conclusion ?
4. (a) Calculer W_0 et W_1.

   (b) En intégrant par parties, donner une première relation liant W_{n+2} et W_n, puis en déduire que :
$$\forall n \geqslant 0,\ W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n.$$

   (c) Montrer que, pour tout $n \geqslant 0$, on a :
$$W_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad W_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$
5. (a) Montrer que, pour tout $n \geqslant 0$, on a :
$$\frac{n+1}{n+2} \leqslant \frac{W_{n+1}}{W_n} \leqslant 1.$$

   (b) En déduire que $W_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} W_n$.

   (c) Montrer que :
$$\forall n \geqslant 1,\ nW_nW_{n-1} = \frac{\pi}{2}.$$

   (d) En déduire un équivalent de W_n quand $n \to +\infty$, puis la limite de la suite $(W_n)_{n\geqslant 0}$.
6. En comparant l'équivalent trouvé en 5.(d) et celui qui se déduit de la valeur exacte de W_{2n} trouvée en 4.(c), donner un équivalent de $\binom{2n}{n}$ quand $n \to +\infty$.