Étude d'une matrice

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. (a) Résoudre les trois systèmes suivants :

$$(\mathcal{S}_1) \left\{ \begin{array}{rcl} 3x - 2y + 3z & = & x \\ x + 2z & = & y \\ 2z & = & z \end{array} \right. \qquad (\mathcal{S}_2) \left\{ \begin{array}{rcl} 3x - 2y + 3z & = & 2x \\ x + 2z & = & 2y \\ 2z & = & 2z \end{array} \right. \qquad (\mathcal{S}_3) \left\{ \begin{array}{rcl} 3x - 2y + 3z & = & 2x + 2 \\ x + 2z & = & 2y + 1 \\ 2z & = & 2z \end{array} \right.$$

   (b) Montrer que la matrice P est inversible, calculer son inverse puis vérifier que $A = PTP^{-1}$.

2. (a) Prouver qu'il existe une suite de réels $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $T^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & \alpha_n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

   (b) Etablir que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n = n2^{n-1}$.

3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = PT^nP^{-1}$. En déduire l'écriture matricielle de A^n en fonction de n.

4. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Etablir que $TM = MT$ si et seulement si M est de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ où a, b et c sont trois réels.

5. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On définit la matrice M' par $M' = P^{-1}MP$.

   (a) Exprimer M en fonction de M', P et P^{-1}.
   En utilisant l'égalité précédente et l'égalité $A = PTP^{-1}$, montrer que la matrice M vérifie l'égalité $AM = MA$ si et seulement si la matrice M' vérifie $TM' = M'T$.

   (b) En déduire que M vérifie $AM = MA$ si et seulement si il existe des réels a, b, c tels que :

$$M = \begin{pmatrix} -a + 2b & 2a - 2b & -a + b + 2c \\ -a + b & 2a - b & -a + b + c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$