Matrices magiques

On désignera par $M[i,j]$ l'élément situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j d'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Définition 1 : Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on appelle *trace de la matrice* M le réel $\mathrm{Tr}(M)$ défini par

$$\mathrm{Tr}(M) = \sum_{i=1}^{n} M[i,i].$$

Définition 2 : On appelle *matrice semi-magique d'ordre* n, une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle qu'il existe un réel σ_M vérifiant

$$\forall i \in [\![1,n]\!]\ ,\quad \sum_{j=1}^{n} M[i,j] = \sigma_M \qquad \text{et} \qquad \forall j \in [\![1,n]\!]\ ,\quad \sum_{i=1}^{n} M[i,j] = \sigma_M.$$

On appelle *matrice magique d'ordre* n, une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui est semi-magique et qui est telle que :

$$\mathrm{Tr}(M) = \sum_{i=1}^{n} M[i,i] = \sigma_M \qquad \textit{et} \qquad \sum_{i=1}^{n} M[i,n+1-i] = \sigma_M.$$

Partie I : Généralités

1. Etablir que :

$$\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2, \quad \mathrm{Tr}(\alpha A + \beta B) = \alpha\,\mathrm{Tr}(A) + \beta\,\mathrm{Tr}(B).$$

2. On pose $V = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$. Montrer que $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est semi-magique si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $MV = \left({}^tM\right)V = \lambda V$. Donner λ en fonction de σ_M.
3. (a) En déduire que si A et B sont semi-magiques d'ordre n et si $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, alors les matrices $\alpha A + \beta B$, AB et ${}^tA$ sont semi-magiques. On donnera $\sigma_{\alpha A+\beta B}$, σ_{AB} et $\sigma_{{}^tA}$ en fonction de σ_A et σ_B.
   (b) Vérifier que si A et B sont magiques d'ordre n et si $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, alors les matrices $\alpha A + \beta B$ et ${}^tA$ sont magiques.
4. On note J_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. Vérifier que la matrice J_n est magique (donner σ_{J_n}). Calculer, pour tout $p \in \mathbb{N}$, la matrice J_n^p.
5. (a) Montrer qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est semi-magique si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $J_n M = M J_n = \lambda J_n$. Donner λ en fonction de σ_M.
   (b) Montrer que si A est semi-magiques d'ordre n et inversible alors la matrice A^{-1} est semi-magique d'ordre n et $\sigma_{A^{-1}} = \frac{1}{\sigma_A}$.

Partie II : Matrices magiques d'ordre 3

1. (a) Montrer que toute matrice magique d'ordre 3 est la somme d'une matrice magique symétrique et d'une matrice magique antisymétrique, et que cette décomposition est unique. *(On procédera par analyse-synthèse)*

   (b) Montrer que les matrices magiques antisymétriques s'ordre 3 sont toutes les matrices de la forme :
$$\begin{pmatrix} 0 & b & -b \\ -b & 0 & b \\ b & -b & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{où} \quad b \in \mathbb{R}.$$

   (c) Monter que les matrices magiques symétriques s'ordre 3 de trace nulle sont toutes les matrices de la forme :
$$\begin{pmatrix} a & -a & 0 \\ -a & 0 & a \\ 0 & a & -a \end{pmatrix} \qquad \text{où} \quad a \in \mathbb{R}.$$

   (d) Etablir que les matrices magiques d'ordre 3 sont outes les matrices de la forme :
$$\begin{pmatrix} a+c & -a+b+c & -b+c \\ -a-b+c & c & a+b+c \\ b+c & a-b+c & -a+c \end{pmatrix} \qquad \text{où} \quad (a,b,c) \in \mathbb{R}^3.$$

   (On remarquera que si A est symétrique magique d'ordre 3 alors $C = A - \frac{\operatorname{Tr} A}{3} J_3$ l'est aussi...)