Matrices stochastiques

Dans tout ce problème, p désigne un entier naturel supérieur ou égal à deux.

Pour tout élément M de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et pour tout couple (i,j) d'entiers compris entre 1 et p, on note $M[i,j]$ le coefficient de M situé sur la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne.

Définition 1 : On se donne une suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, i.e. pour tout $n \in \mathbb{N}$ on se donne une matrice M_n carrée d'ordre p à coefficients réels. On dira que $\boxed{\text{la suite } (M_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers la matrice } L}$ lorsque : pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, la suite réelle $M_n[i,j]$ est convergente et vérifie $\lim\limits_{n\to+\infty} M_n[i,j] = L[i,j]$. Dans ce cas on le note $\lim\limits_{n\to+\infty} M_n = L$.

On montre alors aisément que si (M_n) et (M'_n) convergent vers L et L', alors les suites $(M_n + M'_n)$ et $(M_n M'_n)$ convergent respectivement vers $L + L'$ et LL'.

Définition 2 : On dira qu'$\boxed{\text{une matrice } M \text{ de } \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) \text{ est stochastique}}$ lorsque :

(i) $\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2, \quad M[i,j] \geq 0.$

(ii) $\forall i \in [\![1,p]\!]\,, \quad \sum\limits_{j=1}^{n} M[i,j] = 1.$

Définition 3 : Soit $r \in \mathbb{N}^*$. On dira qu'$\boxed{\text{une matrice } M \text{ de } \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) \text{ est } r\text{-périodique}}$ lorsque $M^r = I_p$.

Division euclidienne : On pourra utiliser le résultat suivant : pour tout $(n,r) \in \mathbb{N}^2$ tel que $r \neq 0$ il existe un unique couple $(q,l) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n = qr + l$ et $0 \leq l \leq r-1$. On dit que q est le quotient de la division euclidienne de n par r, et que l est le reste.

Le but de ce problème est d'étudier certaines propriétés de suites de matrices construites à partir de matrices stochastiques. Das la première partie, on étudie la suite des puissances d'une matrice stochastique. Dans les parties suivantes on étudie la convergence d'une suite $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$C_n = \frac{1}{n+1}\big(I_p + A + A^2 + \cdots + A^n\big),$$

où A est une matrice stochastique.

PARTIE I : Puissances de matrices stochastiques

1. (a) Montrer que la forme générale d'une matrice stochastique d'ordre 2 est $A = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-b & b \end{pmatrix}$ avec $(a,b) \in [0,1]^2$. Dans les trois question suivantes, on se donne une matrice A de la forme précédente.

   (b) Calculer A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$, dans les cas $a = b = 1$ et $a = b = 0$.

   (c) On suppose que $(a,b) \neq (1,1)$ et $(a,b) \neq (0,0)$. On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$A^n = \frac{1}{a+b-2} \begin{pmatrix} (a-1)(a+b-1)^n + b - 1 & (1-a)\big((a+b-1)^n - 1\big) \\ (1-b)\big((a+b-1)^n - 1\big) & (b-1)(a+b-1)^n + a - 1 \end{pmatrix}.$$

   Etablir que la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite que l'on précisera.

2. Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on pose $M(a,b) = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$. On pose aussi $U = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $V = I_3 - U$.

   (a) Calculer U^2, V^2, UV et VU. Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, donner une relation entre $M(a,b)$, U et V.

   (b) Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer $(\alpha U + \beta V)^n$ en fonction de α, β, U, V et n. En déduire, pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, l'expression de $M(a,b)^n$ en fonction de U, V et n.

   (c) A quelles conditions sur a et b, une matrice $M(a,b)$ est-elle stochastique ?
   On suppose ces conditions remplies.
   Montrer que la suite $\big(M(a,b)^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors vers une limite que l'on précisera.

PARTIE II : Etude d'exemples de suites $(\mathbf{C_n})$

1. Soit α un nombre réel. Pour tout entier $n \geq 0$, on pose

$$\gamma_n = \frac{1}{n+1}\big(1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^n\big).$$

   (a) Calculer γ_n, en distinguant deux cas : $\alpha \neq 1$ et $\alpha = 1$.

   (b) Rappeler les résultats du cours sur la convergence de la suite $(\alpha^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Etudier en fonction de α, la convergence de la suite (γ_n) et, en cas de convergence, préciser la limite.

2. On prend $p = 2$ et

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $C_n = \frac{1}{n+1}\big(I_p + A + A^2 + \cdots + A^n\big)$.

   (a) On pose : $P = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1}.

   (b) On pose : $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$. Donner une relation entre A et PDP^{-1}. En déduire une expression de A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

   (c) Déterminer deux matrices U et V appartenant à $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, telles que, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$A^k = U + \left(-\frac{1}{6}\right)^k V.$$

   (d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer C_n en fonction de n, U et V puis montrer que la suite (C_n) converge et donner sa limite C.

<u>Partie III</u> : Etude de la suite $(\mathbf{C_n})$ dans le cas de matrices périodiques

On désigne par r un entier strictement positif.

1. Soit $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite r-périodique de nombre réels, c'est-à-dire telle que, pour tout $k\in\mathbb{N}$, $\alpha_{k+r}=\alpha_k$. On pose :
$$\gamma=\frac{1}{r}\big(\alpha_0+\alpha_1+\cdots+\alpha_{r-1}\big).$$
Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose :
$$\gamma_n=\frac{1}{n+1}\big(\alpha_0+\alpha_1+\cdots+\alpha_n\big).$$
   (a) Prouver que pour entier $k\in\mathbb{N}$:
$$\gamma=\frac{1}{r}\big(\alpha_k+\alpha_{k+1}+\cdots+\alpha_{k+r-1}\big).$$
   (On pourra effectuer la division euclidienne de k par r...)

   (b) Montrer que la suite de terme général
$$\beta_n=(n+1)\gamma_n-(n+1)\gamma$$
   est r-périodique. En déduire que (β_n) est bornée.

   (c) Etablir que (γ_n) converge et calculer sa limite.

2. Soit A une matrice r-périodique de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

   On pose : $\forall n\in\mathbb{N},\ C_n=\frac{1}{n+1}\big(I_p+A+A^2+\cdots+A^n\big)$.

   (a) Montrer que, pour tout $(i,j)\in[\![1,p]\!]^2$, la suite de terme général $\alpha_k=(A^k)[i,j]$ est r-périodique au sens de la question précédente.
   (b) En déduire que la suite (C_n) converge vers :
$$C=\frac{1}{r}\big(I_p+A+A^2+\cdots+A^{r-1}\big).$$

3. Soit $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite r-périodique de nombre réels, à partir d'un certain rang m, c'est-à-dire telle que, pour tout $k\geq m$, $\alpha_{k+r}=\alpha_k$. On pose :
$$\gamma=\frac{1}{r}\big(\alpha_m+\alpha_{m+1}+\cdots+\alpha_{m+r-1}\big).$$
Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose :
$$\gamma_n=\frac{1}{n+1}\big(\alpha_0+\alpha_1+\cdots+\alpha_n\big).$$
   (a) Prouver que (γ_n) admet une limite que l'on précisera.
   (b) Soit A une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ r-périodique à partir d'un cerain rang m, c'est-à-dire telle que, pour tout $k\geq m$, $A^{k+r}=A^k$.
   Pour tout $n\in\mathbb{N}$ on pose $C_n=\frac{1}{n+1}\big(I_p+A+A^2+\cdots+A^n\big)$.
   Montrer que la suite (C_n) converge vers :
$$C=\frac{1}{r}\big(A^m+A^{m+1}+\cdots+A^{m+r-1}\big).$$

Partie IV : Etude de la suite $(\mathbf{C_n})$ dans le cas de matrices stochastiques

On note S_p l'ensemble des matrices stochastiques de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et D_p l'ensemble des matrices déterministes, c'est-à-dire stochastiques et dont les coefficients sont égaux à 0 ou à 1. Enfin, on note Δ_p l'ensemble des matrices déterministes et inversibles.

1. Matrices stochastiques
   (a) Prouver que, pour tout couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\lambda \geq 0$, $\mu \geq 0$ et $\lambda + \mu = 1$, et pour tout couple (M, N) d'éléments de S_p, $\lambda M + \mu N$ appartient encore à S_p.
   (b) Prouver que le produit MN de deux éléments M et N de S_p appartient à S_p.
   (c) Soit A un élément de S_p. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $C_n = \frac{1}{n+1}\big(I_p + A + A^2 + \cdots + A^n\big)$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, C_n est un élément de S_p. Que peut-on en déduire pour la limite C de (C_n), lorsqu'elle existe ?

2. Matrices déterministes
   (a) Soit M un élément de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. Montrer que M est déterministe si et seulement si tous ses coeffcients sont égaux à 0 ou à 1 et si chaque ligne de M contient exactement un seul coefficient égal à 1.
   (b) En déduire que D_p est un ensemble fini et préciser le nombre de ses éléments.
   (c) Montrer que le produit MN de deux éléments M et N de D_p appartient à D_p.
   (d) Soit la matrice déterministe :
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
   Vérifier que $A^5 = A^3$.
   Plus généralement : montrer que si A est un élément quelconque de D_p alors il existe un entier $r \geq 1$ et un entier $m \in \mathbb{N}$ tel que $A^{m+r} = A^m$. En déduire que, dans ces conditions, A est r-périodique à partir du rang m et que, si de plus A est inversible, A est r-périodique (i.e. à partir du rang 0).
   (e) Soit A un élément de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.
   Etablir que $A \in \Delta_p$ si et seulement si A et ${}^tA$ sont éléments de D_p. Dans ces conditions, montrer que A^{-1} est aussi élément de Δ_p et que $A^{-1} = {}^tA$.

3. Etude d'une suite associée à une matrice déterministe.
   (a) En utilisant les résultats de la partie III, établir le résultat suivant : si A est une matrice déterministe inversible, alors la suite $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par $C_n = \frac{1}{n+1}\big(I_p + A + A^2 + \cdots + A^n\big)$ converge vers une matrice stochastique C telle que $C^2 = C$.
   (b) Etendre ce résultat à une matrice déterministe non inversible.

4. Matrices stochastiques inversibles.
   (a) Soient X et Y deux éléments de S_p tels que $XY = I_p$. On se propose de montrer que X et Y sont déterministes inversibles.
      i. Pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, on pose $\mu_j = \max\big\{Y[1, j], Y[2, j], \ldots, Y[p, j]\big\}$.
      Prouver que : $\forall j \in [\![1, p]\!]$, $\mu_j = 1$.
      (On pourra calculer le coefficient $(XY)[i, j]$)
      ii. Montrer que : $\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} Y[i, j] = \sum_{j=1}^{p} \mu_j$. En déduire que tous les coefficients de Y sont égaux à 0 ou à 1.
      iii. Montrer que Y et X appartiennent à Δ_p.
   (b) Plus généralement, soient U et V deux matrices de S_p telles que le produit UV appartienne à Δ_p. Prouver que U et V appartiennent à Δ_p. *(On pourra utiliser la question 2.(e))*