Matrices et suites récurrentes linéaires : étude dans le cas général

Préliminaire

Soit M une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

On note $e = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$.

1. Calculer le produit matriciel $M \times \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.
2. En déduire que M est inversible si et seulement si $e \neq 0$, et que dans ce cas :
$$M^{-1} = \frac{1}{e}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Partie I : Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

On considère une suite réelle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour laquelle il existe des réels a_1 et a_0 vérifiant $a_0 \neq 0$ et la propriété suivante :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+2} + a_1 x_{n+1} + a_0 x_n = 0.$$

On propose dans cette partie d'étudier cette suite récurrente linéaire d'ordre 2 à l'aide du calcul matriciel, sans utiliser la méthode de calcul de son terme général vue en cours. On associe à une telle suite réelle la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathcal{M}_{21}(\mathbb{R})$, définie par :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer une matrice A de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait :
$$X_{n+1} = AX_n.$$
2. On suppose que l'équation $X^2 + a_1X + a_0 = 0$ admet deux racines réelles distinctes $\lambda_1 < \lambda_2$. On note :
$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$
   (a) A l'aide du préliminaire, montrer que la matrice Q est inversible, donner Q^{-1} puis établir que $AQ = QD$.
   (b) Exprimer A^n pour tout entier naturel n, en fonction des matrices Q, Q^{-1}, des réels λ_1, λ_2 et de l'entier n.
   (c) En déduire l'expression de x_n en fonction de n, dans le cas où $a_0 = 2$ et $a_1 = -3$.
3. On suppose que l'équation $X^2 + a_1X + a_0 = 0$ admet une racine réelle double λ. On note :
$$T = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda & 1+\lambda \end{pmatrix}$$
   (a) Etablir que $a_0 = \lambda^2$ et $a_1 = -2\lambda$.
   (b) A l'aide du préliminaire, montrer que la matrice Q est inversible, donner Q^{-1} puis établir que $Q^{-1}AQ = T$.
   (c) Déterminer la matrice T^n en fonction de l'entier naturel n et du réel λ.
   (d) Exprimer A^n pour tout entier naturel n, en fonction des matrices Q, Q^{-1}, du réel λ et de l'entier n.
   (e) En déduire l'expression de x_n en fonction de n, dans le cas où $a_0 = 4$ et $a_1 = -4$.

Partie II : Exemple de récurrence linéaire dans le cas général.

On considère deux suites réelles $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On leur associe la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathcal{M}_{21}(\mathbb{R})$, définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}.$$

1. On suppose que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_{n+1} = A_n X_n$$

avec $A_n = \begin{pmatrix} \frac{n+1}{n+2} & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

   (a) On définit une suite de matrices $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $P_0 = I_2$ (matrice identité d'ordre 2) et $P_{n+1} = A_n P_n$, pour tout entier naturel n.
   Exprimer X_n en fonction de X_0 et de la matrice P_n.

   (b) On introduit la notation suivante :

$$\forall n \geq 1, \quad h_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p},$$

   et $h_0 = 0$. Vérifier que $P_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{n+1} & 0 \\ -h_n & 1 \end{pmatrix}$.

   (c) En déduire les expressions de x_n et y_n en fonction de n et de x_0, y_0.

2. On suppose ensuite que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_{n+1} = A_n X_n + b_n$$

avec $A_n = \begin{pmatrix} \frac{n+1}{n+2} & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $b_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{n+2} \\ -h_n \end{pmatrix}$.

   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est inversible.

   (b) On définit une suite $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs colonnes par $C_0 = X_0$ et la relation de récurrence $C_{n+1} = C_n + (P_{n+1})^{-1} b_n$. Déterminer l'expression de C_n en fonction de n.

   (c) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $Y_n = P_n C_n$. Déterminer l'expression de Y_n en fonction de n, puis vérifier que $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la même relation de récurrence que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.