Moyenne arithmético-géométrique

Préliminaire

Soit $f :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante telle que l'application $g : x \in]0, +\infty[\longmapsto \frac{f(x)}{x}$ soit décroissante. Montrer que f est continue sur $]0, +\infty[$ $\big($c'est-à-dire que pour tout $x_0 \in]0, +\infty[$, on a : $\lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$ $\big)$.

Partie I

Soit a et b deux réels positifs. On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$u_0 = a\ , v_0 = b \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \\ v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \end{cases} .$$

1. Déterminer ces deux suites ainsi que leur limite dans les cas suivants :
   (a) $a = b$.
   (b) $a = 0$ et $b \in \mathbb{R}^+$ quelconque.
2. On revient au cas général et n se propose de montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une même limite.
   (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, u_n et v_n sont bien définis et que $0 \leq u_n \leq v_n$.
   (b) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones de sens contraires.
   (c) Etablir que $\forall n \geq 1$, $0 \leq v_n - u_n \leq \frac{v_1 - u_1}{2^{n-1}}$.
   (d) Conclure.

   La limite commune à ces deux-suites est appelée moyenne arithmético-géométrique de a et b.
   Celle-ci sera désormais notée $M(a, b)$.

   (e) Donner $M(a, a)$ et $M(0, b)$ pour $a \in \mathbb{R}^+$ et $b \in \mathbb{R}^+$.

   Dans la suite du problème, nous pourrons noter $(u_n(a, b))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n(a, b))_{n\in\mathbb{N}}$ les deux suites précédentes.

3. On se propose d'établir quelques propriétés utiles de la fonction $(a, b) \longmapsto M(a, b)$.
   (a) Montrer que : $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, $M(a, b) = M(b, a)$.
   (b) Montrer que : $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}^+$, $M(\lambda a, \lambda b) = \lambda M(a, b)$.
   (c) Montrer que : $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, $M(a, b) = M\left(\sqrt{ab}, \frac{a+b}{2}\right)$.
   (d) Montrer que : $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, $\sqrt{ab} \leq M(a, b) \leq \frac{a+b}{2}$.

Partie II

On considère ici la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=M(1,x)$.

1. Donner $f(0)$ et $f(1)$.
2. On désire établir la croissance de la fonction f. Pour cela, on considère $0 \leq x \leq y$ deux réels.
   (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n(1,x) \leq u_n(1,y)$ et $v_n(1,x) \leq v_n(1,y)$.
   (b) Conclure.
3. On étudie ici la continuité de f sur $\mathbb{R}^+$.
   (a) Montrer que : $\forall x>0,\ f(x)=xf\left(\frac{1}{x}\right)$.
   (b) En exploitant le préliminaire, montrer que f est continue sur $]0,+\infty[$.
   (c) Montrer que : $\forall x>0,\ f(x)=\frac{1+x}{2}f\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)$.
   (d) En déduire que f est continue (à droite) en 0, i.e. $\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$?
4. On étudie ici le comportement de f en $+\infty$.
   (a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \sqrt{x} \leq f(x) \leq \frac{1+x}{2}$.
   (b) Etudier la limite de f en $+\infty$.
5. Représenter sur un même graphe les allures des fonctions $x \longmapsto f(x)$, $x \longmapsto \sqrt{x}$ et $x \longmapsto \frac{x+1}{2}$.
6. En exploitant l'encadrement du $II.4.(a)$, étudier la dérivabilité de f en 0 (à droite) et en 1, c'est-à-dire étudier si les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1},$$

   existent et sont finies.